.1. Сформулируйте леммы о поведении решений уравнения в особых точках.

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - два линейно независимых решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d}{dx}u(x)\right)-q(x)u(x)=0,$$

где $k(x)=(x-a)\varphi(x)$, а $\varphi(a)\neq 0$ - непрерывная на $[a,b]$ функция.

Лемма 1. Если $u_1(x)$ - ограниченное при $x=a$ решение, представимое в виде $u_1(x)=(x-a)^n\psi(x)$, то второе решение является неогр.

Лемма 2. Пусть выполнены условия Леммы 1. Если $u_1(a)\neq 0$ (т.е. $n=0$), то $u_2(x)$ имеет в точке $x=a$ логарифмическую особенность:

$$u_2(x)\sim\ln(x-a) \quad \text{при} \quad u_1(a)\neq 0 \ (n=0).$$

Если $u_1(x)$ имеет при $x=a$ нуль n-го порядка ($n>0$), то $u_2(x)$ имеет при $x=a$ полюс того же порядка:

$$u_2(x)\sim(x-a)^{-n}, \quad \text{если} \quad u_1(x)\sim(x-a)^n \ (n>0).$$

.2. Напишите уравнение Бесселя и его ФСР.

Уравнение Бесселя ν-го порядка (aka уравнение цилиндрических функций ν-го порядка):

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \quad \text{или} \quad x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

Любая пара из следующих функций: $\left\{J_\nu(x),N_\nu(x),H_\nu^{(1)}(x),H_\nu^{(2)}(x)\right\}$ образует ФСР уравнения Бесселя. Чаще всего его пишут в виде:

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x) \quad \text{или} \quad y_\nu(x)=C_1H_\nu^{(1)}(x)+C_2H_\nu^{(2)}(x).$$

Кроме того, если ν - нецелое, то ФСР являются $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$:

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

.3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите примеры цилиндрических функций.

Цилиндрическая функция – всякое не равное тождественно нулю решение уравнения Бесселя.

Уравнение Бесселя:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

Примеры: функции Бесселя, Ханкеля, Неймана, Инфельда и т.п.

.4. Назовите особые точки функций, которые являются решениями уравнения Бесселя.

Особая точка аналитической функции – точка, в которой нарушается аналитичность функции. Функция $f(z)$ называется аналитической в области $A\subset\mathbb{C}$, если ряд Тейлора этой функции сходится в каждой точке $z\in A$ и его сумма равна $f(z)$.

Уравнение Бесселя:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0.$$

Решения – функции Бесселя $J_\nu(x)$, их особые точки - $\{0,\infty\}$.

.5. Дайте определение функций Бесселя через обобщенный степенной ряд.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \text{причем} \quad \Gamma(k+1)=k!.$$

Можно записать (с учетом $\Gamma(k+1)=k!$) чуть иначе:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

.6. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя порядков *n* и *–n*.

Если ν нецелое число, то $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы.

Если $\nu=n\in\mathbb{Z}$ (собственно сабж), то:

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x).$$

.7. Напишите формулы для функций Бесселя порядков ½ и -½. Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?

Функции Бесселя порядков ½ и -½:

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Функции Бесселя полуцелого порядка всегда можно выразить через элементарные функции:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)\right\},$$

где $P_n\left(1/x\right)$ - многочлен степени n относительно $1/x$, а $Q_n\left(1/x\right)$ - многочлен степени $n-1$, причем $P_n(0)=1, Q_n(0)=0$. Формула получается из формулы, связывающей $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x).$$

.8. Напишите интегральное представление функции Бесселя.

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\exp(-ix\sin\xi+i\nu\xi)d\xi,$$

где C_0 - контур на комплексной плоскости $\xi=\xi_1+i\xi_2$, состоящий из луча $(\pi+i\infty,\pi)$, отрезка $(\pi,-\pi)$ и луча $(-\pi,-\pi+i\infty)$.

.9. Дайте определение функции Ханкеля.

Функции Ханкеля – комплексно-сопряженные решения уравнения Бесселя. Определяются контурными интегралами.
Первый Ханкель:

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\exp(-ix\sin\xi+i\nu\xi)d\xi,$$

где C_1 - контур на комплексной плоскости $\xi=\xi_1+i\xi_2$, состоящий из луча $(-i\infty,0)$, отрезка $(0,-\pi)$ и луча $(-\pi,-\pi+i\infty)$.
Второй Ханкель:

$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_2}\exp(-ix\sin\xi+i\nu\xi)d\xi,$$

где C_2 - контур на комплексной плоскости $\xi=\xi_1+i\xi_2$, состоящий из луча $(i\infty+\pi,\pi)$, отрезка $(\pi,0)$ и луча $(0,-i\infty)$.

.10. Напишите формулы, связывающие функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.

$$H_{-\nu}^{(1)}(x)=e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x),$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(x)=e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(x).$$

Доказывается через определение функций Ханкеля, если в них положить $\xi=-\pi-\alpha$.

.11. Напишите формулы, связывающие функции Бесселя и Ханкеля.

Ханкели через Бессели:

$$H_\nu^{(1)}(x)=i\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}\qquad H_\nu^{(2)}(x)=-i\frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

Бессели через Ханкели:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)\right\}\qquad J_{-\nu}(x)=\frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}e^{i\nu\pi}+H_\nu^{(2)}e^{-i\nu\pi}\right\}.$$

.12. Дайте определение функции Неймана.

Функция Неймана – цилиндрическая функция второго рода (и по совместительству мнимая часть функции Ханкеля), определяемая формулой:

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left\{H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\right\},$$

где $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ - функции Ханкеля порядка ν.

.13. Напишите формулу, связывающую функции Неймана, Бесселя и Ханкеля.

Первый Ханкель:

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x).$$

Комплексно-сопряженный к первому Ханкелю второй:

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x).$$

Бессель и Нейман через Ханкелей:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)\right\}\qquad N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left\{H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\right\}.$$

.14. Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Ханкеля 1 и 2 рода.

Первый Ханкель:

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

где $O\left(1/x^{3/2}\right)$ означает члены порядка не ниже $1/x^{3/2}$.

Второй Ханкель:

$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

где $O\left(1/x^{3/2}\right)$ означает члены порядка не ниже $1/x^{3/2}$.

.15. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Бесселя.

Эту формулу легко запомнить как $J_\nu(x) = \operatorname{Re} H_\nu^{(k)}$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

где $O\left(1/x^{3/2}\right)$ означает члены порядка не ниже $1/x^{3/2}$.

.16. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Неймана.

Эту формулу легко запомнить как $N_\nu(x) = \operatorname{Im} H_\nu^{(k)}$:

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$O\left(1/x^{3/2}\right)$ означает члены порядка не ниже $1/x^{3/2}$.

.17. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.

В окрестности нуля при $x > 0$:

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \nu \ge 0, x \to 0,$$

$$N_\nu(x) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{x}{2}, & \nu = 0 \\ -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_\nu^{(1,2)}(x) \sim \begin{cases} \pm i\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{x}{2}, & \nu = 0 \\ \mp i\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$$

.18. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя.

Для определения функции $R(r)$ нужно решить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad 0 \le r \le a, \\ \alpha\dfrac{dR}{dr} + \beta R\Big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) \ne 0 \end{cases}$$

Ее общее решение

$$R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda} r)$$

Так как $N_n(\sqrt{\lambda} r)$ не ограничена, то $C_2 \equiv 0$, кроме того, можем положить $C_1 \equiv 1$, так как собственная функция определяется с точностью до числового множителя. Поэтому собственная функция задачи имеет вид $R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$. Подставляя это в граничное условие, получим дисперсионное уравнение:

$$\alpha\sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0.$$

Последнее уравнение и есть задача для определения собственных значений λ.

.19. Сформулируйте теорему Стеклова в случае задачи на собственные значения для оператора Бесселя.

Всякая дважды дифференцируемая на $[0,a]$ функция $f(r)$, ограниченная при $r = 0$ и обращающаяся в нуль при $r = a$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям Бесселя:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right), \text{ где}$$

$$A_m = \frac{\int_0^a f(r) J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right) r\,dr}{\|J_n\|^2}, \qquad \|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[J'_n(\mu_m^{(n)})\right]^2.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется **абсолютно** сходящимся в области D, если для любого $x \in D$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ сходится. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется **равномерно** сходящимся в области D, если для любого $x \in D$ последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно.

.20. Поставьте задачу на собственные значения для круга в случае граничных условий 1-го рода.

Для определения функции $R(r)$ нужно решить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad 0 \le r \le a, \\ R\big|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) \ne 0 \end{cases}$$

Ее общее решение

$$R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda} r)$$

Так как $N_n(\sqrt{\lambda} r)$ не ограничена, то $C_2 \equiv 0$, кроме того, можем положить $C_1 \equiv 1$, так как собственная функция определяется с точностью до числового множителя. Поэтому собственная функция задачи имеет вид $R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$. Подставляя это в граничное условие, получим дисперсионное уравнение:

$$J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0 .$$

Последнее уравнение и есть задача для определения собственных значений λ.

.21. Поставьте задачу на собственные значения для круга в случае граничных условий 2-го рода.

Для определения функции $R(r)$ нужно решить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2) R = 0, \quad 0 \le r \le a, \\ \alpha \left. \dfrac{dR}{dr} \right|_{r=a} = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \ne 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r) \ne 0 \end{cases}$$

Ее общее решение

$$R_n(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_n(\sqrt{\lambda} r)$$

Так как $N_n(\sqrt{\lambda} r)$ не ограничена, то $C_2 \equiv 0$, кроме того, можем положить $C_1 \equiv 1$, так как собственная функция определяется с точностью до числового множителя. Поэтому собственная функция задачи имеет вид $R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$. Подставляя это в граничное условие, получим дисперсионное уравнение:

$$J_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0 .$$

Последнее уравнение и есть задача для определения собственных значений λ.

.22. Напишите собственные функции круга.

$$u_{nk}(r,\varphi) = J_{nk}\left(\frac{\mu_n^k}{a} r \right) \begin{cases} \sin n\varphi, \\ \cos n\varphi, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots$$

μ_n^k - k-тый корень уравнения $\alpha \mu J_n'(\mu) + \beta a J_n(\mu) = 0$ при фиксированном n.

.23. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений для круга в случае граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода.

Характеристическое уравнение в общем случае:

$$\alpha \sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0 .$$

Вид граничных условий	Характеристическое уравнение
$\beta R\big\|_{r=a} = 0$	$J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$
$\left.\dfrac{dR}{dr}\right\|_{r=a} = 0$	$J_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0$
$\left.\dfrac{dR}{dr} + hR\right\|_{r=a} = 0$	$\sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} a) + h J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$

.24. Напишите формулу для квадрата нормы собственной функции задачи на собственные значения для уравнения Бесселя в случае граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода.

Общая формула: $\|u_{nk}\|^2 = \|J_n\|^2 \|\Phi_n\|^2$, известно, что $\|\Phi_n\|^2 = \varepsilon_n \pi$, $\varepsilon_n = 2$ при $n = 0$, $\varepsilon_n = 1$ при $n \ne 0$.

Вид граничных условий	Квадрат нормы функции Бесселя
$\beta R\big\|_{r=a} = 0$	$\\|J_n\\|^2 = \dfrac{a^2}{2} J'^2_k(\mu_k^{(n)})$
$\left.\dfrac{dR}{dr}\right\|_{r=a} = 0$	$\\|J_n\\|^2 = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - n^2 \Big/ \left[\mu_k^{(n)}\right]^2\right) J_k^2(\mu_k^{(n)})$
$\left.\dfrac{dR}{dr} + hR\right\|_{r=a} = 0$	$\\|J_n\\|^2 = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - \dfrac{\left[\mu_k^{(n)}\right]^2 - n^2}{a^2 h^2}\right) J_k'^2(\mu_k^{(n)})$

.25. Напишите уравнения для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента.

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \nu^2\right) y = 0 .$$

.26. Дайте определение функции Инфельда.

Определение через функцию Бесселя чисто мнимого аргумента:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) .$$

Явное определение:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} .$$

.27. Напишите формулу, связывающую функции Инфельда порядков *n* и *−n*.

Если ν нецелое число, то $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ линейно независимы.

Если $\nu = n \in \mathbb{Z}$ (сабж), то:

$$I_n(x) = I_{-n}(x)$$ ☺.

.28. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Инфельда.

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$O(1/x)$ означает члены порядка не ниже $1/x$.

.29. Дайте определение функции Макдональда.

Функция Макдональда $K_\nu(x)$ определяется с помощью функции Ханкеля чисто мнимого аргумента:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\pi \nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix) .$$

.30. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Макдональда.

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$O(1/x)$ означает члены порядка не ниже $1/x$.

.31. Дайте определение классических ортогональных полиномов.

Система $\{p_n(x)\}$ полиномов всех степеней, заданных на отрезке $[a,b]$, называется системой классических ортогональных полиномов, если они ортогональны на $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, а весовая функция $\rho(x)$ является решением дифференциального уравнения Пирсона:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\right)=\tau(x)\rho(x),\ a<x<b,$$

где $\sigma(x)$ и $\rho(x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условию:

$$x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b=0,\quad m=0,1,\dots$$

Функция $\tau(x)$ - линейная функция вида $\tau(x)=Ax+B$, функция

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & a\neq-\infty,b\neq\infty\\ (x-a) & a\neq-\infty,b=\infty\\ (b-x) & a=-\infty,b\neq\infty\\ 1 & a=-\infty,b=\infty\end{cases},\ \text{вес: } \rho(x)=\frac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx\right).$$

Еще дифференциальное уравнение Пирсона записывают в виде:

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}=\frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2},$$

где все коэффициенты действительны.

.32. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.

Классический ортогональный полином $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей строго внутри отрезка $[a,b]$.

.33. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?

Производные $p_n'(x)$ также являются классическими ортогональными полиномами, заданными на отрезке $[a,b]$ и ортогональными с весом $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$.

.34. Напишите уравнение для классических ортогональных полиномов.

Если весовая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона и на концах интервала (a,b) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{x\to a+0}\rho(x)\sigma(x)=\lim_{x\to a-0}\rho(x)\sigma(x)=0,$$

то ортогональный многочлен $p_n(x)$ является решением уравнения:

$$\sigma(x)p_n''+\tau(x)p_n'+\lambda_n p_n=0,$$

где $\lambda_n=-n\left(\tau'+\sigma''(n-1)/2\right)$.

.35. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.

Найти такие значения λ, для которых на отрезке $a\leq x\leq b$ существуют нетривиальные решения уравнения

$$\sigma(x)p_n''+\tau(x)p_n'+\lambda_n p_n=0,$$

удовлетворяющие условиям $|p(a)|<\infty,\ |p(b)|<\infty$.

.36. Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.

Собственные значения:

$$\lambda_n=-n\left(\tau'+\sigma''(n-1)/2\right).$$

.37. Напишите общую формулу Родрига.

Обобщенная или общая формула Родрига:

$$p_n(x)=\frac{C_n(x)}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^n(x)\rho(x)\right),$$

коэффициенты C_n определяются из условия нормировки:

$$C_n=\frac{n!a_n}{A_{nn}},\ \text{где}\ A_{nm}=(-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}.$$

.38. Напишите определение полиномов Якоби.

Классические ортогональные полиномы, заданные на отрезке $[-1,1]$ и ортогональные на нем с весом $\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, называются полиномами Якоби и обозначаются $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

.39. Напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.

Для полиномов Якоби $\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\sigma(x)=1-x^2$, поэтому формула Родрига имеет вид:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right).$$

.40. Дайте определение полиномов Лежандра.

Классические ортогональные полиномы, заданные на отрезке $[-1,1]$ и ортогональные на нем с весом $\rho(x)=1$, называются полиномами Лежандра и обозначаются $P_n(x)$.

Справедливо соотношение $P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)$, где $P_n^{(0,0)}(x)$ - полином Якоби.

.41. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра.

Найти такие значения λ, для которых на отрезке $-1\le x\le 1$ существуют нетривиальные решения уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\quad -1\le x\le 1,$$

ограниченные при $x=\pm 1$ ($|y(\pm 1)|<\infty$).

.42. Напишите формулу для собственных значений полиномов Лежандра.

Собственные значения:

$$\lambda_n=n(n+1).$$

.43. Напишите выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.

$$\|P_n\|^2=(-1)^n a_n n! C_n\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx=\frac{2}{2n+1}.$$

.44. Дайте определение полиномов Лагерра.

Классические ортогональные полиномы, заданные на отрезке $[0,\infty]$ и ортогональные на нем с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, называются обобщенными полиномами Лагерра и обозначаются $L_n^{\alpha}(x)$. Если $\alpha=0$, то полиномы называются просто полиномами Лагерра и обозначаются $L_n(x)$.

.45. Дайте определение полиномов Эрмита.

Классические ортогональные полиномы, заданные на отрезке $[-\infty,\infty]$ и ортогональные на нем с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$, называются полиномами Эрмита и обозначаются $H_n(x)$.

Явная формула:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

.46. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.

Функция $\Psi(x,z)$, разложение которой в ряд Тейлора при достаточно малых z имеет вид:

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{C_n n!}z^n,$$

где $\{P_n(x)\}$ - система классических ортогональных полиномов, называется производящей функцией классических ортогональных полиномов.

.47. Напишите определение производящей функции полиномов Лежандра.

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2-2zx}}.$$

.48. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной*, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *замкнутой* на (a,b), если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций $\{\varphi_n(x)\}$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такую линейную комбинацию $S_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$, что

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon .$$

Требуемое утверждение: система классических ортогональных полиномов является полной. Полнота есть следствие замкнутости. Система полиномов Лежандра является замкнутой и полной на отрезке $[-1,1]$.

.49. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.

Всякая дважды дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x), \text{ где } f(x) = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx, \ n = 0,1,\ldots .$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется **абсолютно** сходящимся в области D, если для любого $x \in D$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ сходится. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется **равномерно** сходящимся в области D, если для любого $x \in D$ последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно.

.50. Дайте определение присоединенных функций Лежандра.

Присоединенными функциями Лежандра называются функции, определенные соотношениями:

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

где $P_n(x)$ - полиномы Лежандра.

.51. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра.

Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda - \frac{m}{1-x^2}\right] y = 0, \quad -1 \le x \le 1,$$

при условии ограниченности: $|y(\pm 1)| < \infty$.

.52. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра.

Собственные значения такие же, как и у полиномов Лежандра:

$$\lambda_n = n(n+1).$$

.53. Напишите выражение квадрата нормы для присоединенных функций Лежандра.

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

.54. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной*, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *замкнутой* на (a,b), если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций $\{\varphi_n(x)\}$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такую линейную комбинацию $S_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$, что

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon .$$

Система присоединенных функций Лежандра является замкнутой и полной в $L_2[-1,1]$.

$L_2[-1,1]$ - пространство функций, определенных на $[-1,1]$, таких, что интеграл $\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx$ существует (конечен).

Короче: L_2 - пространство функций с интегрируемым квадратом.

.55. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.

Всякая непрерывная и дважды дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)$, обращающаяся в нуль на его концах, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x),$$

где $f(x)=\dfrac{2n+1}{2}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{(m)}(x)dx,\ n=0,1,\ldots;m=0,1,\ldots,n$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется **абсолютно** сходящимся в области D, если для любого $x\in D$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k(x)\right|$ сходится. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется **равномерно** сходящимся в области D, если для любого $x\in D$ последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно.

.56. Дайте определение сферических функций.

Сферические функции – ограниченные на единичной сфере решения уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0,$$

удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi) \\ \left|Y(0,\varphi)\right|<\infty,\ \left|Y(\pi,\varphi)\right|<\infty \end{cases}$$

и обладающие непрерывными до 2 порядка производными.
Единичная сфера – совокупность точек n-мерного евклидова таких, что расстояние между этими точками и началом координат равно 1.
Явное выражение для сферических функций:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{cases},\ n=0,1,2,\ldots,\ m=0,\pm1,\ldots,\pm n,$$

причем положительный верхний индекс (m) приписывается тем функциям, которые содержат $\sin m\varphi$, а отрицательный – тем, которые содержат $\cos m\varphi$. То есть, например:

$$Y_n^{(-1)}(\theta,\varphi)=P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,\ Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)=P_n^{(2)}(\cos\theta)\sin 2\varphi \text{ и т.п.}$$

.57. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.

Найти такие значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения для сферических функций:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \\ Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi) \\ \left|Y(0,\varphi)\right|<\infty,\ \left|Y(\pi,\varphi)\right|<\infty \end{cases}.$$

.58. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной*, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.
Система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *замкнутой* на (a,b), если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций $\{\varphi_n(x)\}$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon>0$ всегда можно указать такую линейную комбинацию $S_n=c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n$, что

$$\int_a^b\left[f(x)-S_n(x)\right]^2dx<\varepsilon.$$

Система сферических функций является замкнутой на единичной сфере $\Sigma:\{0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi\}$, так как любая функция $f(\theta,\varphi)$, имеющая непрерывные вторые производные, может быть аппроксимирована некоторым полиномом из сферических функций. Из замкнутости системы сферических функций вытекает ее полнота.

.59. Напишите условие ортогональности для сферических функций.

Сферические функции ортогональны между собой на единичной сфере $\Sigma:\{0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi\}$:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=0,$$

$0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi$, при $n_1\ne n_2,\ m_1\ne m_2$.

.60. Напишите выражение квадрата нормы для сферических функций.

Общая формула: $\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2=\left\|P_n^{(m)}\right\|^2\left\|\Phi_n\right\|^2$, причем:

$$\left\|\Phi_k\right\|^2=\pi\varepsilon_k=\pi\begin{cases}2, k=0\\1, k\neq 0\end{cases}.$$

Стало быть,

$$\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\pi\varepsilon_m\begin{cases}2, m=0\\1, m\neq 0\end{cases},\ n=0,1,2,\dots,\ m=0,\pm1,\dots,\pm n.$$

.61. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.

Всякая непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая на единичной сфере функция $f(\theta,\varphi)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}f_{nm}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),\ \text{где}$$

$$f_{nm}=\frac{1}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется **абсолютно** сходящимся в области D, если для любого $x\in D$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)|$ сходится. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется **равномерно** сходящимся в области D, если для любого $x\in D$ последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно.

.62. Дайте определение шаровых функций.

Шаровые функции – ограниченные частные решения уравнения Лапласа в шаре:

$$\Delta u=0,\ 0\le r\le a.$$

Явное выражение для шаровых функций:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi)=\begin{cases}r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)\\r^{-(n+1)}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\end{cases}$$

.63. Являются ли шаровые функции собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения? Ответ обоснуйте.

Нет, не являются. Да хотя бы потому, что собственные функции шара – это функции вида:

$$u_{nkm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

$$n=0,1,\dots,\ k=1,2,\dots,\text{где}$$

$\mu_k^{(n+1/2)}$ - k-тый корень уравнения $\alpha\mu J'_{n+1/2}(\mu)+(\beta a-\alpha/2)J_{n+1/2}(\mu)=0$ при фиксированном n.

.64. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае граничных условий Дирихле.

В случае граничных условий Дирихле ($u|_{r=a}=0$) собственные значения определяются уравнением:

$$\lambda=\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2,\ \text{где}$$

$\mu_k^{(n+1/2)}$ - k-тый корень уравнения $J_{n+1/2}(\mu)=0$ при фиксированном n.

.65. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае граничных условий Неймана.

В случае граничных условий Неймана ($\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=0$) собственные значения определяются уравнением:

$$\lambda=\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2,\ \text{где}$$

$\mu_k^{(n+1/2)}$ - k-тый корень уравнения $\mu J'_{n+1/2}(\mu)-\frac{1}{2}J_{n+1/2}(\mu)=0$ при фиксированном n.

.66. Напишите собственные функции шара.

Собственные функции шара имеют вид:

$$u_{nkm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

$$n=0,1,\dots,\ k=1,2,\dots.$$

(+Смотри пункт 63 ↑).

.67. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных?

Имеем линейное относительно старших производных уравнение второго порядка:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0.$$

Уравнение

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

называется **характеристическим** для первого уравнения, а интегралы этого уравнения называются **характеристиками**.

.68. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типа в случае двух переменных.

Уравнение $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$ в точке M называется уравнением

– **гиперболического** типа, если в точке M $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$;

– **параболического** типа, если в точке M $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$;

– **эллиптического** типа, если в точке M $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$.

.69. Напишите каноническую форму уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных.

Тип уравнения	Каноническая форма
Гиперболический	$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=F(x,y,u,u_\xi,u_\eta)$
Параболический	$u_{\eta\eta}=F(x,y,u,u_\xi,u_\eta)$
Эллиптический	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=F(x,y,u,u_\xi,u_\eta)$

.70. Дайте определение корректно поставленной задачи по Адамару.

Математическая задача поставлена корректно, если:

1) решение задачи существует при любых допустимых исходных данных;
2) задача имеет единственное решение при каждом наборе исходных данных;
3) решение задачи непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво).

.71. Приведите пример постановки задачи для уравнения колебаний.

Найти решение уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0\le x\le l,\ t>0,$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned}u(0,t)&=\mu_1(x)\\u(l,t)&=\mu_2(x)\end{aligned}\right\}\ t>0$$

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=\varphi_1(x)\\u_t(x,0)&=\varphi_2(x)\end{aligned}\right\}\ 0\le x\le l$$

где $\mu_1,\mu_2,\varphi_1,\varphi_2$ - заданные функции.

.72. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний.

Пусть задана ограниченная область D с кусочно-гладкой границей S. Начально-краевая задача для уравнения колебаний в области D заключается в определении в цилиндре $\bar{Q}_\infty=\bar{D}\times[0,\infty)$ функции $u(M,t)$, удовлетворяющей в Q_∞ уравнению колебаний, начальным и граничным условиям:

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(M,t),\quad (M,t)\in Q_\infty,$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(M),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(M),$$

$$\left.\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right|_S=\mu(P,t)\big|_{P\in S},\quad |\alpha|+|\beta|\ne 0.$$

Классическим решением начально-краевой задачи для уравнения колебаний является функция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ уравнению, начальным и граничным условиям.

.73. Приведите пример постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Первая краевая задача для ограниченного стержня.

Найти решение уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}\ \text{при}\ 0<x<l,\quad 0<t\le T,$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),0<x<l$$

$$u(0,t)=\mu(t),0<t\le T$$

где φ,μ - заданные функции.

.74. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пусть задана ограниченная область D с кусочно-гладкой границей S. Начально-краевая задача для уравнения колебаний в области D заключается в определении в цилиндре $\bar{Q}_\infty = \bar{D}\times[0,\infty)$ функции $u(M,t)$, удовлетворяющей в Q_∞ уравнению теплопроводности, начальным и граничным условиям:

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,t), \quad M\in D,\ t>0$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(M), \quad M\in D,$$
$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_S = \mu(P,t)\big|_{P\in S}, \quad |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Классическим решением начально-краевой задачи для уравнения колебаний является функция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные первого порядка по t и второго по M в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ уравнению, начальным и граничным условиям.

.75. Изложите общую схему метода разделения переменных (метода Фурье).

Пусть задана следующая задача:

Найти решение уравнения

$$\rho P_t[u] = Lu\,.$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_S = 0, \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \phi_k(M), k=0,1,\dots,l-1.$$

Тогда решение этого уравнения можно получить в виде произведения $u(M,t) = v(M)T(t)$, причем функции $v(M)$ и $T(t)$ определяются из вспомогательных задач:

$$\begin{cases} Lv + \lambda\rho v = 0, & v(M)\neq 0, M\in D \\ \alpha\dfrac{\partial v}{\partial n} + \beta v\Big|_S = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} P_t(T) + \lambda T = 0 \\ \dfrac{\partial^k T}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(M) \end{matrix}.$$

.76. К решению каких задач можно свести решение общей начально-краевой задачи в линейном случае?

Полная постановка начально-краевой задачи имеет вид:

$$\rho P_t[u] = Lu + f, M\in Q$$
$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_s = \mu(P,t), P\in S$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(M), k=0,1,\dots,l-1$$

В силу линейности решение этой задачи можно свести к сумме решений трех задач:

1. Задачи для однородного уравнения с неоднородными начальными и однородными граничными условиями ($f\equiv 0$, $\mu=0$, $\varphi_k\neq 0$).
2. Задачи для однородного уравнения с однородными начальными и неоднородными граничными условиями ($f\equiv 0$, $\mu\neq 0$, $\varphi_k=0$).
3. Задачи для неоднородного уравнения с однородными начальными и однородными граничными условиями ($f\neq 0$, $\mu=0$, $\varphi_k=0$).

.77. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе *S* области *D* и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.

Задача Штурма-Лиувилля:

Найти значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения, удовлетворяющие граничным условиям Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0$$
$$u\big|_S = 0$$

где

.

Свойства собственных функций и собственных значений этой задачи:

1) Существует бесконечно много собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{u_n\}$; собственные значения при увеличении номера n неограниченно возрастают. Каждому собственному значению соответствует лишь конечное число собственных функций.
2) При $q>0$ собственные значения задачи Дирихле положительны: $\forall n: \lambda_n > 0$.
3) Собственные функции ортогональны между собой в области D с весом $\rho(M)$:

$$\int_D u_n(M)\rho(M)u_m(M)dV = 0,\ m \neq n.$$

4) Теорему разложимости Стеклова. Произвольная дважды непрерывно дифференцируемая в D функция $f(M)$, удовлетворяющая однородному граничному условию, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям данной краевой задачи:

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(M), \qquad f_n = \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_D f(M)u_n(M)dV.$$

.78. Изложите применение метода Фурье в случае неоднородных граничных условий.

Пусть требуется решить задачу с неоднородным граничным условием.

$$\rho P_t[u] = Lu$$

$$\left.\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right|_S = \mu(P,t)|_{P\in S}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, k = 0,1,...,l-1$$

Тогда будем искать решение этой задачи в виде $u(M,t) = U(M,t) + V(M,t)$, где $U(M,t)$ - новая неизвестная функция, а функция $V(M,t)$ выбрана так, чтобы она удовлетворяла неоднородному граничному условию

$$\left.\alpha\frac{\partial V}{\partial n} + \beta V\right|_S = \mu(P,t)|_{P\in S}$$

и обладала нужным числом непрерывных производных по M и t.

Тогда для функции $U(M,t)$ и получаем задачу

$$\rho P_t[U] = LU + f(M,t)$$

$$\left.\alpha\frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\right|_S = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\right|_{t=0}, k = 0,1,...,l-1$$

где $f(M,t) = LV - \rho P_t[V]$. Эта задача известно как решается.

.79. Напишите первую формулу Грина. Каковы условия ее применимости?

Пусть $u = u(x,y,z)$ и $v = v(x,y,z)$ - функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри замкнутой области $T+\Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T.

Тогда имеет место **первая формула Грина**:

$$\int_T u\Delta v dV = \oint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \int_T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа,

$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ - производная по направлению внешней нормали.

Можно записать и несколько иначе:

$$\int_T uLv dV = \oint_\Sigma ku\frac{\partial v}{\partial n}dS - \int_T(k\ grad\ v\ grad\ u + quv)dV,$$

где k,q - непрерывные в замкнутой области $T+\Sigma$ функции, причем $k(M)$ - непрерывно дифференцируема в открытой области T.

.80. Напишите вторую формулу Грина. Каковы условия ее применимости?

Пусть $u = u(x,y,z)$ и $v = v(x,y,z)$ - функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри замкнутой области $T+\Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T.

Тогда имеет место **вторая формула Грина**:

$$\int_T(u\Delta v - v\Delta u)dV = \oint_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

Можно записать и несколько иначе:

$$\int_T(uLv - vLu)dV = \oint_\Sigma k\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

где k,q - непрерывные в замкнутой области $T+\Sigma$ функции, причем $k(M)$ - непрерывно дифференцируема в открытой области T.

.81. Напишите третью формулу Грина.

Пусть $u = u(x,y,z)$ - функция, непрерывная вместе со своими первыми производными внутри замкнутой области $T+\Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T. Рассмотрим функцию $v = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$, где M_0 - некоторая внутренняя точка области T.

Третья или основная формула Грина имеет вид:

$$\Omega \cdot u(M_0) = \oint_S \left[\frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0 M_P}} \right) \right] dS_P - \oint_D \frac{\Delta u(M)}{R_{M_0 M}} dV_M ,$$

где $\Omega = \begin{cases} 4\pi, & M \in T \\ 2\pi, & M \in \Sigma \\ 0, & M \notin T + \Sigma \end{cases}$.

.82. Приведите пример постановки краевой задачи для уравнения Лапласа.

Найти функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую внутри области T уравнению:

$$\Delta u = -f(M)$$

и граничному условию Дирихле (первая краевая задача):

$$u(M,0) = f_1 \text{ на } \Sigma ,$$

где Σ - замкнутая поверхность, ограничивающая T.

.83. Дайте определение гармонических функций. Приведите примеры.

Функция $u(M)$, называется гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа.

Пример: функция $u(r,\varphi) = \dfrac{r}{a}\sin\varphi$ является гармонической в круге $0 \le r \le a$, т.к. имеет непрерывные частные производные любого порядка и удовлетворяет в указанной области уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ с граничным условием $u(r,\varphi)\big|_{r=a} = \sin\varphi$.

.84. Сформулируйте теорему Гаусса для гармонических функций.

Если $u(M)$ - функция, гармоническая в области T, ограниченной поверхностью $\sum$, то имеет место соотношение

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 ,$$

где S - любая гладкая замкнутая поверхность, целиком принадлежащая области T.

.85. Сформулируйте теорему о среднем для гармонических функций.

Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0 - какая-нибудь точка, лежащая внутри области T, то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\Sigma_a} u dS ,$$

где $\sum_a$ - сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T.

.86. Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой? Обоснуйте ответ.

Да, является. Гармоническая в области T функция имеет внутри T производные всех порядков.

Это утверждение следует из третьей формулы Грина, так как при $M_0 \in D$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифференцировать по координате любое число раз.

.87. Сформулируйте принцип максимума для гармонических функций.

Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T + \sum$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальное и минимальное значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности $\sum$.

.88. Сформулируйте принцип сравнения для гармонических функций.

Если $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в области $T + \sum$, гармоничны внутри T и если $u(M) \le v(M)$ на границе $\sum$, то $u(M) \le v(M)$ всюду внутри T.

.89. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?

Внутренняя задача Дирихле (первая внутренняя краевая задача) не может иметь двух различных классических решений.
Это утверждение доказывается от противного. Построив функцию разности двух классических решений, следует показать, что она тождественно равна нулю.

.90. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?

Третья краевая задача для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M),\, M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right|_S = f(M) \end{cases}$$

где $h \neq 0$, причем $h = h(P) > 0$ при всех $P \in S$, не может иметь двух различных классических решений.
Идея доказательства: показать, что краевая задача

$$\Delta u = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right|_S = 0$$

имеет только нулевое решение, используя первую формулу Грина.

.91. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода? Обоснуйте ответ.

Нет, не имеет.
Рассмотрим вторую краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M),\, M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(M) \end{cases}$$

Если предположить существование двух различных классических решений этой задачи $u_1(M)$ и $u_2(M)$, то для их разности $u = u_1 - u_2$ будем иметь $\left.\partial u/\partial n\right|_S = 0$. Полагая в первой формуле Грина (смотри вопрос 79 ↑) $v = u$, получим $grad\, u = 0$, $u(M) = const$, поэтому классическое решение второй внутренней краевой задачи не единственно и определяется с точностью до произвольной постоянной.

.92. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае трех переменных.

Гармоническая функция трех переменных $u(M) \equiv u(x,y,z)$ называется регулярной в бесконечности, если $|u| \le \dfrac{A}{r}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, при достаточно большом $r \ge r_0$.

.93. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух переменных.

Функция двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

.94. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Внешняя первая краевая задача для гармонических функций с тремя независимыми переменными имеет единственное классическое решение, регулярное на бесконечности.

.95. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

Внешняя первая краевая задача для гармонических функций с двумя независимыми переменными имеет единственное классическое решение, регулярное на бесконечности.
Идея доказательства. Допустим существование двух различных решений $u_1(M)$ и $u_2(M)$ и рассмотрим их разность $u = u_1 - u_2$.

$u(M)$ можно мажорировать функцией $u_{R_1} = N\dfrac{\ln\left(R_{MM_0}/R\right)}{\ln\left(R_1/R\right)}$. Если неограниченно увеличивать R_1, то $u_{R_1}(M) \to 0$ при $R_1 \to \infty$, откуда следует $u(M) = 0$.

.96. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в двумерном случае?
Да. Вторая внешняя краевая задача (внешняя задача Неймана) имеет единственное решение, регулярное на бесконечности.

.97. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае?
Да, имеет. Из шести основных задач для уравнения Лапласа (трех внутренних и трех внешних) в трехмерном случае неединственное решение с точностью до постоянной имеет только внутренняя задача Неймана. Решение остальных краевых задач единственно.

.98. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.
Функция $G(M,P)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D, если удовлетворяет следующим условиям:

1. $G(M,P)=\dfrac{1}{4\pi R_{MP}}+v$, где v - гармоническая в D функция;
2. $G(M,P)\big|_{P\in S}=0$.

.99. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае.
Функция $G(M,Q)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D плоскости, если удовлетворяет следующим условиям:

1. $G(M,Q)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{R_{MQ}}+v$, где v - гармоническая в D функция;
2. $G(M,Q)\big|_{Q\in\Gamma}=0$, где Γ - замкнутый контур, граница D.

.100. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае
Функция $G(M,Q)$ называется функцией Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в области D, если удовлетворяет следующим условиям:

1. $G(M,P)=\dfrac{1}{4\pi R_{MP}}+v$, где v - гармоническая в D функция;
2. $G(M,P)\big|_{S}=-\dfrac{1}{S_0}$, где S_0 - площадь поверхности S.

.101. Дайте определение объемного потенциала. Перечислите его основные свойства

Интеграл

$$V(M) = \int_D \frac{\rho(Q)}{R_{MQ}} dV_Q ,$$

где $\rho(Q)$ - ограниченная интегрируемая функция, определенная в области D, называется объемным потенциалом.

Свойства:

1. $\Delta V(M) = 0$ при $M \notin D$, и, если $\rho(M)$ непрерывно дифференцируема в D, то $\Delta V(M) = -4\pi\rho(M)$, $M \in D$.

2. Если $\rho(M)$ интегрируема с квадратом, то $V(M)$ является обобщенным решением уравнения Пуассона $\Delta V(M) = -4\pi\rho$.

.102. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Рассмотрим интеграл

$$V(M) = \int_D F(M,P) f(P) d\tau_P ,$$

где $F(M,P)$ - функция, обращающаяся в бесконечность при совпадении аргументов и непрерывная по M, а $f(P)$ - ограниченная функция. Этот интеграл называется равномерно сходящимся в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что имеет место:

$$\left| V_{\delta(\varepsilon)}(M) \right| = \left| \int_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(M,P) f(P) d\tau_P \right| \le \varepsilon$$

для любой точки, расстояние которой от M_0 меньше δ, и для любой области $T_{\delta(\varepsilon)}$, содержащей точку M_0 и имеющей диаметр $d \le \delta(\varepsilon)$.

Наконец, теорема. Интеграл, рассмотренный выше, равномерно сходящийся в точке M_0, есть непрерывная функция в точке M_0.

.103. Дайте определение поверхностного потенциала простого слоя.

Поверхностным потенциалом простого слоя называется интеграл вида

$$V(M) = \int_\Sigma \frac{\mu(P)}{R_{MP}} d\sigma_P ,$$

где $\mu(P)$ - поверхностная плотность потенциала простого слоя в точке P, Σ - некоторая поверхность.

.104. Дайте определение поверхностного потенциала двойного слоя.

Поверхностным потенциалом двойного слоя называется интеграл вида

$$W(M) = -\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} \nu(P) d\sigma_P ,$$

где $\nu(P)$ - поверхностная потенциала двойного слоя в точке P, Σ - двусторонняя поверхность. Определение соответствует случаю, когда внешняя сторона поверхности является отталкивающей.

.105. Дайте определение логарифмического потенциала простого слоя.

Логарифмический потенциал простого слоя – это интеграл вида:

$$V(M) = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P ,$$

где μ - плотность потенциала простого слоя на единицу длины.

.106. Дайте определение логарифмического потенциала двойного слоя.

Логарифмический потенциал двойного слоя:

$$W(M) = -\int_C \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P = -\int_C \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} dl_P ,$$

где $\nu(P)$ - поверхностная потенциала двойного слоя в точке P, n_P - внешняя нормаль к кривой C в точке P, φ - угол между внутренней нормалью в точке P и вектором PM.

.107. Дайте определение поверхности Ляпунова.

Поверхность $\sum$ называется поверхностью Ляпунова, если:

1. В каждой точке поверхности $\sum$ существует определенная нормаль (касательная плоскость).

2. Существует такое число $d > 0$, что прямые, параллельные нормали в какой-либо точке P поверхности $\sum$, пересекают не больше одного раза часть $\sum_P'$ поверхности $\sum$, лежащую внутри

сферы радиуса d с центром в точке P. Эти участки поверхности Σ'_P называются окрестностями Ляпунова.

3. Угол $\gamma(P,P')=(\vec{n}_P \hat{,} \vec{n}_{P'})$ между нормалями в точках P и P', где $P'\in\Sigma'_P$, удовлетворяет условию $\gamma(P,P')<Ar^{\delta}$, где r - расстояние между точками P и P', A - некоторая постоянная, $0<\delta\le 1$.

.108. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.

Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью $|\mu(P)|\le N$, заданной на гладкой поверхности S, является непрерывной функцией во всем пространстве. Гладкость поверхности определяется наличием непрерывной нормали в каждой точке.

.109. Сформулируйте теорему о существовании потенциала двойного слоя.

Потенциал двойного слоя $W(M)=-\int\limits_{\Sigma}\frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}\nu(P)d\sigma_P$ с непрерывной и ограниченной плотностью $|\nu(P)|\le N$ на поверхности S существует, т.е. является сходящимся несобственным интегралом при $M\in S$.

.110. Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя? Обоснуйте ответ.

Нет, так как потенциал простого слоя является непрерывной (смотри пункт 108 ↑) функцией во всем пространстве.

.111. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей поверхности?

Потенциал $W(M_0)=-\nu_0\int\limits_{\Sigma}\frac{\cos\varphi}{R^2_{MP}}d\sigma_P$ имеет значение:

1. $4\pi\nu_0$, если M_0 лежит внутри поверхности Σ;
2. $2\pi\nu_0$, если M_0 лежит на поверхности Σ;
3. 0, если M_0 лежит снаружи поверхности Σ.

.112. Напишите формулу скачка потенциала двойного слоя при переходе через несущую поверхность.

Потенциал двойного слоя в некоторой точке P_0, лежащей на поверхности Σ, является разрывной функцией, для которой имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} W^0_в(P_0)&=W^0_\Sigma(P_0)+2\pi\nu(P_0)\\ W^0_н(P_0)&=W^0_\Sigma(P_0)-2\pi\nu(P_0)\end{aligned}\right\},$$

где $W^0_в(P_0)$ - предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к точке P_0 с внутренней стороны, а $W^0_н(P_0)$ - предельное значение с наружной стороны.

Формула для скачка потенциала:

$$W^0_в(P_0)-W^0_н(P_0)=4\pi\nu(P_0).$$

.113. Напишите два союзных интегральных уравнения Фредгольма, к которым сводятся внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Дирихле:

$$2\pi\nu(P_0)-\oint\limits_{\Sigma}\nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}d\sigma_P=f(P_0),P_0\in\Sigma.$$

Внешняя задача Неймана:

$$2\pi\mu(P_0)-\oint\limits_{\Sigma}\mu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}d\sigma_P=-f(P_0),P_0\in\Sigma.$$

.114. Напишите два союзных интегральных уравнения Фредгольма, к которым сводятся внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Внешняя задача Дирихле:

$$2\pi\nu(P_0)+\oint\limits_{\Sigma}\nu(P)\frac{\partial}{\partial n_p}\frac{1}{R_{PP_0}}d\sigma_P=\frac{\alpha}{R_{PP_0}}-f(P_0),P_0\in S.$$

Внутренняя задача Неймана:

$$2\pi\mu(P_0)+\oint\limits_{\Sigma}\mu(P)\frac{\partial}{\partial n_p}\frac{1}{R_{PP_0}}d\sigma_P=f(P_0),P_0\in S.$$

.115. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Дирихле

$$\Delta u=0,\ M\in D,\quad u\big|_S=f(P),\ P\in S$$

в области D, ограниченной поверхностью S, имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции $f(M)$.

.116. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Внешняя задача Неймана

$$\Delta u = 0, M \in D_e, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n_e}\right|_S = f(P), P \in S$$

в области D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции $f(M)$.

.117. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Неймана

$$\Delta u = 0, M \in D, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), P \in S$$

в области D имеет классическое решение, определяемое с точностью до произвольной постоянной, при любой непрерывной функции $f(M)$, удовлетворяющей уравнению

$$\oint_S f(P)dS = 0.$$

.118. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Внешняя задача Дирихле

$$\Delta u = 0, M \in D_e, \quad u|_S = f(P), P \in S$$

в области D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции $f(M)$.

.119. Напишите необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Неймана

$$\Delta u = 0, M \in D, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), P \in S$$

в области D имеет решение при условии, что функция $f(M)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$\oint_S f(P)dS = 0.$$

.120. Что такое потенциал Робена? Каков его физический смысл?

Потенциал Робена определяется интегралом:

$$V(M) = \oint_\Sigma \frac{\mu_0(P)}{R_{MP}} d\sigma_P \text{ в } D+S,$$

где D - область, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, $\mu_0(P)$ - собственная функция уравнения

$$2\pi\mu(P_0) + \oint_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{1}{R_{PP_0}} d\sigma_P = 0, P_0 \in \Sigma.$$

Физический смысл: это потенциал, создаваемый зарядами на проводящей поверхности, а его плотность есть плотность зарядов, которая устанавливается на этой поверхности.

.121. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в двумерном случае.

Уравнение $\Delta_2 u + k^2 u = 0$ при $k^2 > 0$ является уравнением Бесселя нулевого порядка и имеет два фундаментальных решения:

$$H_0^{(1)}(kR_{MM_0}), H_0^{(2)}(kR_{MM_0}),$$

имеющих логарифмическую особенность при $R_{MM_0} = 0$:

$$H_0^{(1,2)}(kR_{MM_0}) \sim \mp \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{kR_{MM_0}}.$$

Уравнение $\Delta_2 u + k^2 u = 0$ при $\chi^2 < 0$ является уравнением для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента нулевого порядка и его линейно независимыми решениям являются функции

$$I_0(\chi R_{MM_0}) \text{ и } K_0(\chi R_{MM_0}).$$

Из этих двух функций функция $K_0(\chi R_{MM_0})$ имеет логарифмическую особенность при $R_{MM_0} = 0$:

$$K_0(\chi R_{MM_0}) \sim 1/\chi R_{MM_0}$$

и поэтому является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца.

.122. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в трехмерном случае.

Уравнение Гельмгольца: $\Delta u + cu = 0$. Пусть $c = k^2$ для $c > 0$ и $c = -\chi^2$ для $c < 0$. Тогда для случая $c > 0$ получаем три решения:

$$u = \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \frac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \frac{\cos\left(kR_{MM_0}\right)}{R_{MM_0}},$$

а для случая $c < 0$ - одно $u = \dfrac{e^{-\chi R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}$, т.к. второе решение $u = \dfrac{e^{\chi R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}$ неограниченно возрастает при $R_{MM_0} \to \infty$.

.123. Дайте определение объемного потенциала для уравнения Гельмгольца.

Интеграл

$$U(M) = \int_D \rho(Q) \frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}} dV_Q$$

называется объемным потенциалом для уравнения Гельмгольца.

.124. Дайте определение потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца.

Интеграл

$$V(M) = \int_S \mu(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$$

называется потенциалом простого слоя для уравнения Гельмгольца.

.125. Дайте определение потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца.

Интеграл

$$W(M) = -\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P$$

называется потенциалом двойного слоя для уравнения Гельмгольца.

.126. В каком случае выполняется принцип максимума для уравнения Гельмгольца?

Принцип максимума: решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$, определенное и непрерывное в замкнутой области, не может достигать во внутренних точках данной области положительных максимальных и отрицательных минимальных значений.

Для уравнения $\Delta u + cu = 0$ принцип максимума имеет место только при $c < 0$.

.127. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.

Первая краевая задача для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = 0, M \in D, \\ u\big|_S = f(P), P \in S \end{cases}$$

не может иметь более одного классического решения.

Вторая и третья краевые задачи для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = 0, M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right|_S = f(P), P \in S \end{cases}$$

не могут иметь более одного классического решения при $h(P) \geq 0$.

.128. Сформулируйте общую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа.

Найти функцию $u(M,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\rho(M)u_t = \underbrace{div\left(k(M)\,grad\,u\right)}_{L[u]} + f(M,t),\ M \in D,\ t \geq 0,$$

начальному условию

$$u(M,0) = \varphi(M),\ M \in D,$$

и граничному условию

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t), P \in S, t \geq 0,$$ где

$\mu(P,t)$, $\varphi(M)$ и $f(M,t)$ - известные функции, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

.129. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения параболического типа.

Классическим решением начально-краевой задачи для уравнения параболического типа называется функция $u(M,t)$, непрерывная со своими частными производными первого порядка по координатам в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные первого порядка по времени и второго по координатам в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ уравнению

$$\rho(M)u_t = \underbrace{div\left(k(M)\,grad\,u\right)}_{L[u]} + f(M,t),\ M \in D,\ t \geq 0,$$

начальному условию

$$u(M,0) = \varphi(M),\ M \in D,$$

и граничному условию

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t), P \in S, t \geq 0,$$ где

$\mu(P,t)$, $\varphi(M)$ и $f(M,t)$ - известные функции, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

.130. Сформулируйте принцип максимума для уравнения параболического типа.

Если функция $u(M,t)$, определенная и непрерывная в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0,T]$, удовлетворяет уравнению

$$\rho(M)u_t = \underbrace{div\left(k(M)\,grad\,u\right)}_{L[u]} + f(M,t),\ M \in D,\ t \geq 0,$$

то максимальное и минимальное значение функции $u(M,t)$ достигаются или в начальный момент, или в точке границы $P \in S$:

$$M = \max\left\{u(M,0), u(P,t), M \in \overline{D}, P \in S, t \in [0,T]\right\}.$$

.131. Сформулируйте принцип сравнения для уравнения параболического типа.

Пусть $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$ - два классических решения уравнения теплопроводности

$$\rho(M)u_t = div\left(k(M)\,grad\,u\right) + f(M,t),\ M \in D,\ t \geq 0,$$

непрерывных в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0,T]$.

1. Если имеют место соотношения

$$\begin{cases} u_1(M,0) \leq u_2(M,0), M \in D \\ u_1(P,t) \leq u_2(P,t), \quad P \in S, t \in [0,T] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(M,0) \leq u_2(M,0), M \in \overline{D}, \\ u_1(P,t) \leq u_2(P,t), \quad P \in S, t \in [0,T] \end{cases}$$

то $u_1(M,t) \leq u_2(M,t)$ во всем цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0,T]$.

2. Если имеют место соотношения

$$\begin{cases} |u_1(M,0) - u_2(M,0)| \leq \varepsilon, M \in D \\ |u_1(P,t) - u_2(P,t)| \leq \varepsilon, \quad P \in S, t \in [0,T] \end{cases}$$

то $|u_1(M,t) - u_2(M,t)| \leq \varepsilon, M \in D$.

.132. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа.

Внутренняя начально-краевая задача Дирихле

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = div\left(k(M)\,grad\,u\right) + f(M,t) \\ u(M,0) = \varphi(M), M \in D \\ u(P,t) = \mu(P,t), P \in S, t \in [0,T] \\ \varphi(P) = \mu(P,0), P \in S \end{cases}$$

может иметь только одно классическое решение.

.133. Сформулируйте теорему устойчивости решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа.

Классическое решение задачи

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = div\big(k(M)\,grad\,u\big)+f(M,t) \\ u(M,0)=\varphi(M),\, M\in D \\ u(P,t)=\mu(P,t),\, P\in S, t\in[0,T] \end{cases}$$

устойчиво по начальным и граничным значениям в равномерной норме.

.134. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, имеет на нем кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда существует классическое решение задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0<x<l, \\ u(0,t)=0, u(l,t)=0, & t>0 \end{cases}$$

представимое рядом

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx, \quad n=1,2,...$

.135. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле.

Функция мгновенного точечного источника:

$$\begin{cases} G(M,Q,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}v_n(M)v_n(Q), & t\ge 0 \\ G(M,Q,t)\equiv 0 & , \ t<0 \end{cases}$$

где $\{v_k\}$ - собственные функции отрезка, λ_n - собственные значения отрезка, $n=0,1,\dots$.

Более подробно:

$$\begin{cases} G(M,Q,t)=\dfrac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\dfrac{\pi n}{l}x\cdot\sin\dfrac{\pi n}{l}\xi, & t\ge 0 \\ G(M,Q,t)\equiv 0 & , \ t<0 \end{cases}$$

.136. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Найти ограниченную функцию $u(x,t)$, определенную в области $-\infty\le x\le\infty$, $t\ge 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty\le x\le\infty,\ t\ge 0,$$

и начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty\le x\le\infty.$$

.137. Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каким методом она доказывается?

Задача для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}+f(x,t), -\infty\le x\le\infty, t\ge 0 \\ u(x,0)=\varphi(x), -\infty\le x\le\infty \end{cases}$$

может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{\Omega}$.

Для доказательства предположим существование двух классических ограниченных решений, рассмотрим их разность $v(x,t)$. Сравним $v(x,t)$ с функцией $w(x,t,L)=\dfrac{4M}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+a^2t\right)$, являющейся решением некоторого уравнения теплопроводности в области $-L\le x\le L$. Применяя принцип сравнения при $L\to\infty$, получим в пределе $v(x,t)=0$.

.138. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Если $\varphi(x)$ - непрерывная и ограниченная на бесконечной прямой $-\infty\le x\le\infty$ функция, то формула

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,$$

где $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$,

определяет при $-\infty\le x\le\infty$, $t\ge 0$ классическое решение задачи

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),-\infty\le x\le\infty,t\ge 0\\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty\le x\le\infty\end{cases}.$$

.139. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Фундаментальное решение задачи:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right).$$

.140. Перечислите основные свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right),\ -\infty\le x\le\infty,\ t\ge 0.$$

Свойства:

1. $G(x,\xi,t)$ определена при $t>0$ и положительна: $G(x,\xi,t)>0$, $-\infty\le x\le\infty$, $\xi\in\mathbb{R}^1$.
2. $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет по переменным x и t однородному уравнению теплопроводности: $G_t=a^2G_{xx}$, $-\infty\le x\le\infty$, $\xi\in\mathbb{R}^1$, $t\ge 0$.
3. $G(x,\xi,0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(x-\xi)}d\xi=\delta(x,\xi)$. $G(x,\xi,t)$ на $\mathbb{R}^1$ является решением задачи Коши:

$$\begin{cases}G_t=a^2G_{xx},-\infty\le x\le\infty,t\ge 0\\ G(x,\xi,0)=\delta(x,\xi),x,\xi\in\mathbb{R}^1\end{cases}$$

4. Принцип взаимности (свойство симметрии):

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\varsigma)=G(\xi,\eta,\varsigma;x,y,z).$$

Говоря словами, действие в точке (x,y,z) источника, находящегося в точке (ξ,η,ς), равно действию в точке (ξ,η,ς) такого же источника, помещенного в точку (x,y,z).

+ смотри пункт 141 ↓.

.141. Каков физический смысл фундаментального решения для уравнения теплопроводности для бесконечной прямой?

Физический смысл фундаментального решения:

$G(x,\xi,t-t_0)=\frac{Q}{c\rho^2\sqrt{\pi a(t-t_0)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}\right)$ - температура в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t=t_0$ в точке ξ выделяется количество тепла $Q=c\rho$.

Кроме того, так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)d\xi=1$, то количество тепла на прямой не меняется с течением времени.

.142. Что такое "парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?

Формула

$$G(x,\xi,t-t_0)=\frac{Q}{c\rho^2\sqrt{\pi a(t-t_0)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}\right)$$

показывает, что во всякой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником, действующим в начальный момент $t=0$, отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Это можно интерпретировать как результат бесконечно быстрого распространения тепла, что противоречит молекулярно кинетической теории. Объясняется этот парадокс тем, что при выводе уравнений теплопроводности не учитывается инерционность процесса движения молекул. Проще говоря, модель немного «кривая».

.143. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.

Найти ограниченную функцию $u(x,t)$, определенную в области $x>0,\ t>0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & x>0,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0,\\ \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+\beta u(0,t)=\mu(t), & t\ge 0\\ |\alpha|+|\beta|\ne 0\end{cases}$$

.144. В чем заключается "метод продолжения" для построения решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?

Требуется решить задачу на полупрямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0,\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x>0, \\ |u(x,0)<M,| & x>0,\ t>0 \end{cases}$$

где граничные условия имеют вид $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\mu(t)$ (граничные условия Неймана) или $u(0,t)=\mu(t)$ (граничные условия Дирихле).

Тогда можно решить вспомогательную задачу, записав решение в виде суммы $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ представляет влияние только начального условия, а $u_2(x,t)$ - только граничного.

Для функции $u_1(x,t)$, удовлетворяющей уравнению, введем вспомогательную функцию $U(x,t)$, определенную на бесконечной прямой $-\infty \le x \le \infty$, удовлетворяющую уравнению и условиям $U(0,t)=0, U(x,0)=\Psi(x)$

$$\begin{cases} U(0,t)=0, \\ U(x,0)=\Psi(x) \end{cases},\quad \Psi(x,t)=\begin{cases} \varphi(x), x>0 \\ -\varphi(-x), x<0 \end{cases}$$ (задача Дирихле),

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(0,t)=0, \\ U(x,0)=\Psi(x) \end{cases},\quad \Psi(x,t)=\begin{cases} \varphi(x), x>0 \\ \varphi(-x), x<0 \end{cases},$$ (задача Неймана).

Тогда решение задачи для $u_1(x,t)$ удастся записать в виде:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{a^2 t}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-e\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right\}\varphi(\xi)\,d\xi .$$

.145. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле.

$$G_1(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)-G(x,-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right\}$$

.146. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Неймана.

$$G_2(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right\}$$

.147. Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий.

Требуется решить задачу на полупрямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}+f(x,t), & x>0,\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x>0, \\ |u(x,0)<M,| & x>0,\ t>0 \end{cases}$$

где граничные условия имеют один из видов:

1. $u(0,t)=0$ (граничные условия Дирихле).

Решение: $u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty G_1(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\, d\tau$, $G_1(x,\xi,t-\tau)$ смотри пункт 145 ↑.

2. $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ (граничные условия Неймана).

Решение: $u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty G_2(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\, d\tau$, $G_2(x,\xi,t-\tau)$ смотри пункт 146 ↑.

3. $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+hu(0,t)=0$ (граничные условия третьего рода).

Решение: $u(x,t)=\int_0^\infty G_3(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_0^\infty G_3(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\, d\tau$, где

$$G_3(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t)-2h\int_0^\infty G(x,-\xi-\eta,-t)e^{-h\eta}\,d\eta .$$

Функция $u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$ является общим решением задачи

$$\begin{aligned} &u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_+\\ &u(x,0)=0, \quad x\in\overline{R}^+\\ &u_x(0,t)=0, \quad t\in[0,T]\end{aligned}.$$

.148. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности в пространстве.

Найти функцию $u(M,t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности и начальному условию:

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u+f(M,t), & (M,t)\in\Omega_3\\ u(M,0)=\varphi(M), & M\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

.149. Сформулируйте теорему единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.

Задача, поставленная в пункте 148 ↑, может иметь лишь одно классическое решение, ограниченное в области Ω_3.

.150. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.

Если функция $\varphi(M)$ непрерывна и ограничена во всем трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, то формула

$$u(M,t)=\int\limits_{R^3}G(M,Q,t)\varphi(Q)dV_Q$$

определяет при $(M,t)\in\Omega^3$ классическое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u_{xx}+f(M,t), & (M,t)\in\Omega_3\\ u(M,0)=\varphi(M), & M\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

при $f(M\equiv 0)$.

Фундаментальное решение:

$$G(M,Q,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right).$$

.151. Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле.

Общий вид решения уравнения:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & x\ge 0, t\ge 0\\ u(x,0)=0, & x\ge 0\\ u(0,t)=\mu(t), & t\ge 0, \mu(0)=0\\ |u(x,t)|\le C, & x\ge 0, t\ge 0\end{cases}$$

следующий - $u(x,t)=\dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\dfrac{\mu(t)}{(t-\tau)^{3/2}}d\tau$.

Эта хреновина была построена с помощью интеграла Дюамеля

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}W(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau,$$

где

$$W(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\exp(-z^2)dz.$$

.152. Сформулируйте принцип Дюамеля.

Изложенный в 151 ↑ прием построения решения начально-краевой задачи в виде интеграла Дюамеля является частным случаем общего метода решения начально-краевых задач, известного под названием «принцип Дюамеля».

.153. Поставьте общую начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа.

Найти функцию $u(M,t)$, определенную при $t \geq 0$ внутри заданной области T с границей Σ, удовлетворяющую уравнению

$$\rho(M)u_{tt} = div(k(M)\, grad\, u) - q(M)u + f(M,t),\ M \in T,\ t > 0,$$

граничному условию на Σ

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t), P \in \Sigma, t \geq 0,$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(M,0) &= \varphi(M), \\ u_t(M,0) &= \psi(M) \end{aligned}\right\},\ M \in \overline{T},$$

где $f(M,t)$, $\mu(P,t)$, $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ - заданные функции.

.154. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа.

Классическим решением уравнения, описанного в пункте 153 ↑, является функция $u(M,t)$, непрерывная вместо с первыми производными в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_\infty = \overline{T} \times [0,\infty]$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ уравнению, двум начальным и граничному условию.

Если граничное условие является условием Дирихле, то непрерывность первых производных по M замкнутом цилиндре не требуется.

.155. Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?

Задача из пункта 153 ↑ может иметь только одно классическое решение.

Для доказательства предположим существование двух классических ограниченных решений, рассмотрим их разность $v(M,t)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_D \left(\rho v^2 + k\ grad^2 v\right) dV$.

Оказывается, что она тождественно равна нулю, а значит, что $v(M,t) \equiv 0$.

.156. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке в случае однородных граничных условий Дирихле.

Пусть в задаче

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0,l),\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,l], \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную третью производную, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, а функция $\psi(x)$ - непрерывно дифференцируема на $[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда решение этой задачи существует и равно

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\varphi_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + \psi_n \frac{\sin\frac{\pi n a}{l}t}{\frac{\pi n a}{l}}\right]\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $\begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{Bmatrix} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \begin{Bmatrix} \varphi(\xi) \\ \psi(\xi) \end{Bmatrix} \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi$.

.157. Дайте определение функции влияния мгновенного точечного импульса (функции Грина) для уравнения колебаний на отрезке.

Функция Грина для отрезка определяется следующим рядом:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}t}V_n(M)V_n(Q),$$

где V_n, λ_n - собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} L_M\left[V_n\right] + \lambda_n V_n = 0, & M \in D \\ N_P\left[V_n(P)\right] = 0, & P \in S \end{cases},\ \text{причем } \|V_n\| = 1.$$

Явно:

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot\sin\frac{\pi n\xi}{l}\cdot\sin\frac{\pi na}{l}t.$$

.158. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Найти функцию $u(x,t)$, определенную при $t\ge 0$ на бесконечной прямой $-\infty\le x\le\infty$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty\le x\le\infty,\ t>0,$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{array}{l}u(x,0)=\varphi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{array}\right\},\ -\infty\le x\le\infty,$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

.159. Напишите формулу Даламбера.

Решение одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty\le x\le\infty,\ t>0,$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{array}{l}u(x,0)=\varphi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{array}\right\},\ -\infty\le x\le\infty,$$

имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz=f_1(x-at)+f_2(x+at).$$

.160. В чем состоит метод распространяющихся волн?

Метод распространяющихся волн состоит в поиске решения уравнения колебаний в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях: функция $u(x,t)$ ищется в виде суммы функций $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$, каждая из которых представляет неизменный профиль, перемещающийся вправо или влево по оси x.

.161. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на бесконечной прямой R^1. Тогда классическое решение задачи Коши

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),-\infty\le x\le\infty,t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases},$$

существует, единственно и определяется формулой Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz=f_1(x-at)+f_2(x+at).$$

.162. Сформулируйте теорему устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Пусть начальные функции $\varphi_\alpha(x)$ и $\psi_\alpha(x)$, $\alpha=1,2$, двух задач Коши

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),-\infty\le x\le\infty,t>0,\\ u(x,0)=\varphi_\alpha(x),\\ u_t(x,0)=\psi_\alpha(x)\end{cases}$$

удовлетворяют условиям

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\le\varepsilon,\quad x\in\mathbb{R}^1 \text{ и}$$

$$\int_a^b|\psi_1(z)-\psi_2(z)|^2dz\le\varepsilon^2(b-a)$$

для любых конечных a и b, $(a<b)$.

Тогда для решений этих задач при $t\in[0,T]$ выполняется неравенство

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\varepsilon(1+T),-\infty\le x\le\infty,t\ge 0.$$

.163. Что такое «характеристический треугольник» на фазовой плоскости?

Выберем на фазовой плоскости фиксированную точку $M(x_0,y_0)$ и проведем через нее характеристики $x-at=x_0-at_0$ и $x+at=x_0+at_0$. Эти характеристики пересекут ось x соответственно в точках $P(x_0-at_0,0)$ и $Q(x_0+at_0,0)$ значение функции в точке $M(x_0,t_0)$ равно $u(x_0,y_0)=f_1(x_0-at_0)+f_2(x_0+at_0)$. Таким образом, значение функции $u(x,t)$ в точке $M(x_0,t_0)$ определяется значениями функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках $P(x_0-at_0,0)$ и $Q(x_0+at_0,0)$ соответственно, являющихся вершинами треугольника MPQ, образованного отрезками двух характеристик и отрезком оси x. Этот треугольник называется характеристическим треугольником точки $M(x_0,t_0)$.

.164. В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?

В следующем. Для решения уравнения колебаний интегрируем уравнение колебаний по «характеристическому треугольнику» (умножив предварительно на $1/2a$) и применяем к результату формулы Грина.

.165. Напишите общую формулу решения начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Решение одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty\le x\le\infty,\ t>0,$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=\varphi(x),\\ u_t(x,0)&=\psi(x)\end{aligned}\right\},\ -\infty\le x\le\infty,$$

имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz=f_1(x-at)+f_2(x+at)+$$

$$+\frac{a}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

.166. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Пусть функция $f(x,t)$ непрерывно дифференцируема при $-\infty\le x\le\infty$, $t>0$. Тогда решение задачи существует, единственно, и определяется формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

.167. В чем состоит "метод продолжения" построения решения начально-краевой задачи на полупрямой в случае однородных граничных условий Дирихле и Неймана?

В задаче Дирихле функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжаются нечетным образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases},\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases},$$

а в задаче Неймана – четным образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases},\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}.$$

И уже «продолженные» функции подставляются в формулу Даламбера.

.168. Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае однородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле. Каким методом можно его получить?

Решение одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty\le x\le\infty,\ t>0,$$

с однородными начальными условиями

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=0,\\ u_t(x,0)&=0\end{aligned}\right\},\ -\infty\le x\le\infty,$$

и неоднородным граничным условием

$$u(0,t)=\mu(t),\ t>0,$$

имеет вид:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & 0<t<\dfrac{x}{a}\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}\end{cases}$$

Получение: ищем функцию $u(x,t)$ в виде $u(x,t)=f(x-at)$.

.169. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве.

Найти функцию $u(M,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(M,t)\ (M,t)\in \Omega_3 = R^3\times[0,T],$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(M,0)=\varphi(M) \\ u_t(M,0)=\psi(M) \end{cases},$$

где $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ - заданные функции.

.170. Напишите формулу Кирхгофа.

$$u(M_0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma\left\{\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n_P}\left(P,t_0-\frac{R}{a}\right)-u\left(P,t_0-\frac{R}{a}\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{aR}\frac{\partial u}{\partial t}\left(P,t_0-\frac{R}{a}\right)\frac{\partial R}{\partial n_P}\right\}d\sigma_P+\frac{1}{4\pi a^2}\int_T\frac{f\left(M,t_0-\frac{R_{M_0M}}{a}\right)}{R_{M_0M}}dV_M$$

$R=R_{M_0P}$.

.171. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве.

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\Sigma_M^{at}}\frac{\varphi(P)}{R_{MP}}d\sigma_P+\oint_{\Sigma_M^{at}}\frac{\psi(P)}{R_{MP}}d\sigma_P\right\}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{K_M^{at}}\frac{f(Q,t-R_{QM}/a)}{R_{MP}}dV_Q$$

где Σ_M^{at} - сфера радиуса at с центром в точке M, Σ_M^{at} - шар радиуса at с центром в точке M.

.172. В чем состоит "метод спуска"?

Метод состоит в том, чтобы из формулы решения с большим числом пространственных переменных получить формулу с меньшим числом пространственных переменных. Применим не только к уравнению колебаний.

.173. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в двумерном пространстве.

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{U_M^{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+\right.$$

$$\left.+\int_{U_M^{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right)+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\int_{U_M^{at}}\frac{f(\xi,\eta,t-\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

где U_M^{at} - круг радиуса at с центром в точке M.