1. Лемма о поведении решений ур-я $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$, $x \in (a, b)$, где $k(x) = (x-a)\phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$, в особых точках.

$\sqsupset$ $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - 2 линейно независ-х реш. ур-я. $k(x) > 0$, при $x \in (a, b)$; $\phi(x)$ - непрерывная на $[a, b]$, $\phi(a) \neq 0$ ($k(x)$ в $x = a$ имеет нуль первого порядка).

Тогда, if $\exists$ ограниченное решение $u_1(x)$, имеющее конечный $\lim_{x\to a}$, то $u_2(x)$ при $x \to a$ - неогранич;

if $u_1(a) \neq 0$: $u_2(x)$ имеет ln особенность в a;

if $u_1(x)$, имеет нуль n-го порядка, то $u_2(x)$ - n-й полюс.

2. Ур. Бесселя: $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$

ФСР : $\{J_\nu, N_\nu\}$, $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$ - $\forall$ ν; $\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ - при нецелом.

3. Цилиндрические функции. Примеры.

ЦФ - любое ненулевое решение уравнения Бесселя.

$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$

$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_\nu(x)}{\sin\pi\nu}$

4. Особые точки функций, решений уравнения Бесселя.

Ур. Бесселя: $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ особые точки ∞, 0.

5. Функция Бесселя через обобщенный степенной ряд.

$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$

6. Формула связи ф-й Бесселя порядков n и $-n$: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

7. Формулы функций Бесселя порядков 1/2 и -1/2. Всегда ли Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?

$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x;$

$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x;$

$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right)\right\};$

$P_n(0) = 1,\ Q_n(0) = 0.$

8. Интегральное представление функций Бесселя.

$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0^+} \exp(-ix\sin\xi + i\nu\xi)d\xi$

$J_n(x) = \frac{i^\nu}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ix\cos\phi + in\phi)d\phi$

9. Функция Ханкеля.

$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} \exp(-ix\sin\xi + i\nu\xi)d\xi$

$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} \exp(-ix\sin\xi + i\nu\xi)d\xi$

10. Формула связи функций Ханкеля положительного и отрицательного индексов.

$H^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\nu\pi}H^{(1)}_{\nu}(x) \quad H^{(2)}_{-\nu}(x) = e^{-i\nu\pi}H^{(2)}_{\nu}(x)$

11. Формула связи функций Бесселя и Ханкеля.

$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left\{H^{(1)}_\nu(x) + H^{(2)}_\nu(x)\right\}$

$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2}\left\{H^{(1)}_\nu(x)e^{i\nu\pi} + H^{(2)}_\nu(x)e^{-i\nu\pi}\right\}$

$H^{(1)}_\nu(x) = i\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$

$H^{(2)}_\nu(x) = -i\frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$

12. Функция Неймана - $N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left\{H^{(1)}_\nu(x) - H^{(2)}_\nu(x)\right\}$

13. Формула связи функций Бесселя, Неймана и Ханкеля.

$H^{(1)}_\nu(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$

$H^{(2)}_\nu(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$

14. Асимптотические формулы при больших аргументах ф-и Ханкеля.

$H^{(1)}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2})$

$H^{(2)}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2})$

15. Асимптотическая формула при больших аргументах ф-и Бесселя.

$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}) + O(x^{-3/2})$

16. Асимптотическая формула при больших аргументах ф-и Неймана.

$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}) + O(x^{-3/2})$

17. Поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.

$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \ \nu \geq 0$

$N_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$

$H^{(1,2)}_\nu(x) \sim \begin{cases} \pm i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}, & \nu = 0 \\ \mp i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, & \nu > 0 \end{cases}$

18. Задача на С.З. для уравнения (оператора) Бесселя.

$\alpha\sqrt{\lambda}J'_n(\sqrt{\lambda}x) - \beta J_n(\sqrt{\lambda}x) = 0$

19. Теорема Стеклова для задачи на С.З. уравнения Бесселя.

$\forall$ дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r = 0$ и $f(r_0) = 0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $f(r) = \sum_{m=1}^\infty A_m J_n\left(\frac{\mu^{(n)}_m}{r_0}r\right)$, где

$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r)J_n\left(\frac{\mu^{(n)}_m}{r_0}r\right)rdr}{\|J_n\|^2}, \ \|J_n\|^2 = \frac{r_0^2}{2}[J'_n(\mu^{(n)}_m)]^2$

20. Задача на С.З. круга в случае граничных условий 1го рода.

$\begin{cases} \Delta u + \lambda u &= 0 \\ u|_{r=a} &= 0; \end{cases}$

21. Задача на С.З. круга в случае граничных условий 2го рода.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u &= 0 \\ \partial u/\partial n|_{r=a} &= 0; \end{cases}$$

22. Собственные функции круга.

$$u_{kn}(r,\phi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\begin{cases} \cos n\phi, \\ \sin n\phi, \end{cases} \quad n = 0, 1..., \ k = 1, 2...$$

23. Характеристическое ур-е для С.З. задачи для круга в случае граничных условий 1,2,3-го рода.

Задача Ш. Л. для круга K_α ($u \neq 0$):

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in K_\alpha \\ \alpha \partial u/\partial n + \beta u|_C = 0 & |\alpha| + |\beta| \neq 0; \end{cases}$$

характер-е ур-е: $\alpha\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + \beta J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$

С.З : $\lambda = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2$,

где $\mu_k^{(n)}$ - k-й корень $\alpha\mu J_n'(\mu) + \beta a J_n(\mu)$

Для граничных условий первого рода:

хар. ур-е $J_n(\mu) = 0$;

второго рода:

хар. ур-е $\mu J_n'(\mu) = 0$;

третьего рода:

хар. ур-е $\mu J_n'(\mu) + ahJ_n(\mu) = 0$.

24. Формула для квадрата нормы собственной функции задачи на С.З. для оператора Бесселя в случае граничных условий 1, 2 и 3-го рода.

$\|u_{kn}\|^2 = \|\Phi_n\|^2 \cdot \|J_n\|^2 = \frac{1}{2}\|J_n\|^2$

$\|J_n\|^2 = \int_0^a J_n^2(\sqrt{\lambda}r)rdr = \frac{a^2}{2}\left\{J_n'^2(a\sqrt{\lambda}) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2\lambda}\right)J_n^2(a\sqrt{\lambda})\right\}$

1-го рода: $\|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^2(\mu_k^{(n)})$;

2-го рода: $\|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{[\mu_k^{(n)}]^2}\right)J_n^2(\mu_k^{(n)})$;

3-го рода: $\|J_n\|^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\mu_k^{(n)2} - n^2}{a^2h^2}\right)J_n'^2(\mu_k^{(n)})$.

25. Ур-е для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента.

$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$

26. Функция Инфельда - $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$

27. Формула связи функции Инфельда порядков n и $-n$. $I_n(x) = I_{-n}(x)$

28. Асимптотическая формула при больших значениях аргумента для функции Инфельда. $I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}(1 + O(1/x))$

29. Функция Макдональда - $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$

30. Асимптотическая формула для функции Макдональда.

$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}(1 + O(1/x))$

31. Определение классических ортогональных полиномов (КОП).

Система $\{p_n(x)\}$ полиномов всех степеней, заданных на отрезке $\{a, b\}$ ортогональные на $\{a, b\}$ с весом $\rho(x)$, удовлетворяющего на $\{a, b\}$:

$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x)$ - ур-е Пирсона

$x^m\sigma(x)\rho(x)|_a^b = 0$, $m = 0, 1...$, $\tau(x) = Ax + B$

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & a \neq -\infty, b \neq \infty \\ (x-a) & a \neq -\infty, b = \infty \\ (b-x) & a = -\infty, b \neq \infty \\ 1 & a = -\infty, b = \infty \end{cases}$$

$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right)$

32. Теорема о нулях КОП:

КОП $p_n(x)$ имеет ровно n простых корней внутри $[a, b]$

33. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом?

$\{p'_n(x)\}$ - КОП с весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$. ($\{p_n^{(m)}\}$ с $\rho_m = \sigma^m\rho$)

34. Уравнение для КОП.

$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}) + \lambda_n\rho p_n = 0$

35. Задача на С.З. для КОП на отрезке с условиями в особых точках.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left\{\sigma\rho\frac{dy_n}{dx}\right\} + \lambda_n\rho y_n = 0 \\ |y(a)| < \infty, \ |y(b)| < \infty \end{cases}$$

36. Формула С.З. задачи Штурма-Лиувилля для КОП.

$\lambda_n = -n\left(\tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''\right)$

37. Общую формулу для КОП (общая ф-ла Родрига).

$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{\sigma^n(x)\rho(x)\}$

38. Полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

КОП на $[-1, 1]$, ортогональные с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

$C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

39. Формула Родрига для полиномов Якоби:

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+n}\}$

40. Полиномы Лежандра -

полиномы Якоби при $\alpha = 0, \ \beta = 0$: $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$, т.е. КОП на $[-1, 1]$ с весом 1.

41. Задача на С.З. полиномов Лежандра.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + \lambda_n P_n = 0 \\ |P_n(\pm 1)| < \infty, \ -1 < x < 1 \end{cases}$$

42. С.З. полиномов Лежандра - $\lambda_n = n(n+1)$.

43. Квадрат нормы полиномов Лежандра:

$||P_n||^2 = (-1)^n a_n n! C_n \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = \frac{2}{2n+1}$

44. Обобщенные полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$:

КОП на $[0, \infty)$, ортогональные с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$.

При $\alpha = 0$, $L_n = L_n^{(0)}(x)$ - называют полиномами Лагерра.

45. Полиномы Эрмита $H_n(x)$.

КОП на $(-\infty, \infty)$, ортогональные с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$.

46. Производящая ф-я КОП:

При малых z:

$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{C_n n!} z^n$

47. Производящая ф-я полиномов Лежандра :

$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$

48. Является ли система полиномов Лежандра полной?

Система полиномов Лежандра полна на отрезке $[-1; 1]$ и замкнута

49. Теорема Стеклова для полиномов Лежандра.

$f(x)$ - дважды дифференцируема на $[-1, 1]$, тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$- абсолютно и равномерно сходящийся ряд, где $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$

50. Присоединенные функции Лежандра - $P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$

51. Задача на С.З. присоединенных функций Лежандра.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(m)}(x)\right] + \left[\lambda_n - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_n^{(m)}(x) = 0 \\ |P_n(\pm 1)| < \infty, \ \ -1 < x < 1 \end{cases}$$

52. С.З. присоединенных функций Лежандра - $\lambda_n = n(n + 1)$.

53. Квадрат нормы присоединенных функций Лежандра.

$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}$, т.к. $\int_{-1}^{1} \frac{(P_n^{(m)}(x))^2}{1-x^2} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}$

54. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной?

Замкнутая по теореме: система присоединенных функций Лежандра является замкнутой в $L_2[-1, 1]$.

Полная, поскольку присоединенные функции Лежандра как С.Ф. задачи Ш. Л. ортогональны с весом 1. Т.е. при $n_1 \neq n_2$: $\int_{-1}^{1} P_{n_1}^{(m)}(x) P_{n_2}^{(m)}(x) dx = 0$.

55. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.

$\forall\ f(x)$, дважды дифференцируемая и непрерывная на отрезке $[-1, 1]$, и обращающаяся в нуль на его концах может быть разложена по присоединенным функциям Лежандра в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x)$, где $f_n = \frac{1}{\|P_n^{(m)}\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x) dx$.

56. Дайте определение сферических функций.

Ограниченные на ед. сфере решения ур-я $\begin{cases} \Delta_{\theta,\phi} Y + \mu Y = 0 \\ Y(\theta, \phi) = Y(\theta, \phi + 2\pi) \\ |Y(0, \phi)| < \infty \quad |Y(\pi, \phi)| < \infty \end{cases}$,

обладающие непрерывными пр-ми до 2го порядка включит-но.

57. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.

$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\phi} Y + \mu Y = 0 \\ Y(\theta,\phi) = Y(\theta,\phi+2\pi) \\ |Y(0,\phi)| < \infty \quad |Y(\pi,\phi)| < \infty \end{cases}$$

$\Delta_{\theta\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

58. Является ли система сферических функций замкнутой и полной?

$\{Y_n^{(m)}\}$ на ед. сфере $\Sigma : \{0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi\}$ замкнута и полна.

59. Условие ортогональности сферических функций.

$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\phi) Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\phi) \sin\theta d\theta d\phi = 0$

60. Квадрат нормы сферических функций.

$\|Y_n^{(m)}\|^2 = 2\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

$n = 0, 1, 2... \quad m = 0, \pm1, ..., \pm n$

61. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.

$\forall f(\theta,\phi)$ непрерывная и дифференцируемая на единичной сфере разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\phi)$, где

$f_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi) Y_n^{(m)}(\theta,\phi) \sin\theta d\phi d\theta$

62. Шаровые функции - решения ур-я Лапласа в шаре $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ 0 \le r \le a \end{cases}$ называются шаровыми функциями $u_{nm} = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\phi) \\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\phi) \end{cases}$

63. Являются ли шаровые функции собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения? Обоснуйте ответ.

Нет, не являются.

64. Задача на С.З. для шара для граничных условий Дирихле. Уравнение для определения С.З.

$J_{n+1/2}(\mu) = 0 \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2$

65. Задача на С.З шара для граничных условий Неймана. Уравнение для определения С.З.

$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2} = 0 \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2$

66. Собст. функции шара (для граничных усл-й 1, 2 и 3-го рода).

С.Ф. : $u_{knm}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a} r\right) Y_n^{(m)}(\theta,\phi)$;

С.З. : $\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2$, определяются ур-м:

1. $J_{n+1/2}(\mu) = 0$.
2. $\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0$.
3. $\mu J'_{n+1/2}(\mu) + \left(ah - \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(\mu) = 0$.

67. Характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных:

$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y)$ и $\frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y)$ - уравнения характеристик для уравнения $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, а их решения - характеристики.

68. Определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных.

$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ точке М будет

ур-ем эллиптического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

ур-ем гиперболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

ур-ем параболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

69. Каноническая форма уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных.

Ур-я гиперболического типа $U_{\xi\eta} = F(x, y, U, U_\xi, U_\eta)$ или $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = F$.

Ур-я параболического типа $U_{\eta\eta} = F(x, y, U, U_\xi, U_\eta)$

Ур-я эллиптического типа $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = F(x, y, U, U_\xi, U_\eta)$

70. Дайте определение корректно поставленной задачи по Адамару.

1. Решение должно существовать в каком-либо классе функций;

2. Решение должно быть единственным в каком-либо классе функций;

3. Решение должно непрерывно зависеть от данных (начальных и граничных условий, свободного члена, коэффициентов и т.д.).

71. Пример постановки начально-краевой задачи для уравнения колебаний.

Пусть задана ограниченная область D с кусочно-гладкой границей S. Начально-краевая задача для ур-я колебаний в области D заключается в определении в цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0, T]$ ф-ции $u(M, t)$, удовлетворяющей ур-ю колебаний, 2м начальным и граничному условиям:

$\rho u_{tt} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) - qu + f(M, t), \quad (M, t) \in Q_\infty)$

$u|_{t=0} = \phi(M) \quad u_t|_{t=0} = \psi(M) \quad M \in \overline{D}$,

$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u|_S = \mu(P, t), \quad P \in S, \quad t \in [0, \infty)$,

$|\alpha| + |\beta| \neq 0$, где n - внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S.

72. Классическое решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний

функция $u(M, t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные 2го порядка в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ ур-ю, 2м нач. и граничному усл-м.

Для задачи Дирихле непрерывность первых производных по M в $\overline{Q}_\infty$ не требуется.

73. Пример постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}u) + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_\infty;$

$u(M,0) = \phi(M), \quad M \in \overline{D};$

$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u|_S = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,\infty);$

$|\alpha| + |\beta| \neq 0$, где n - внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S.

74. Классическое решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

функция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными по M в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_\infty = \overline{D}\times[0,\infty)$, имеющая непрерывные производные 1го порядка по t и 2го порядка по M в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ ур-ю теплопроводности, нач. и граничному усл-м.

Необходимым условием существования классического решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности является согласование начального и граничного условий.

75. Общая схема метода разделения переменных (метода Фурье) -

Решения $\begin{cases} \rho P_t[u] = Lu \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_S = 0 \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}|_{t=0} = \phi_k(M) \\ k = 0, 1..., l-1 \end{cases}$, получить в виде $u(M,t) = v(M)T(t) \neq 0$, причем

функции $v(M)$ и $T(t)$ определяются уравнениями

$\begin{matrix} Lv + \lambda\rho v = 0 & v(M) \neq 0, & M \in D \\ P_t(T) + \lambda T = 0 & T(t) \neq 0, & t > 0 \end{matrix}$ с гран-ми усл-ми $\alpha\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v|_S = 0$.

76. К решению каких задач можно свести решение общей начально-краевой задачи в линейном случае?

1) Однородная с нулевыми граничными условиями;

2) Неоднородная с нулевыми граничными и начальными условиями;

3) Однородная с нулевыми начальными условиями.

77. Задача Штурма-Лиувилля оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе S области D. Свойства С.Ф. и С.З. этой задачи.

$\begin{cases} Lv + \lambda\rho v = 0, \quad v(M) \neq 0, \quad M \in D \\ v|_S = 0, \qquad (Lv = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}v) - q(M)v) \end{cases}$

1)$\exists\, \infty$ счетное множество С.З. $\{\lambda_n\}$ и С.Ф. $\{v_n(M)\}$. При $\uparrow n$ С.З. неограниченно возрастают. Каждому С.З. соответствует конечное число лин. незав. С.Ф. => ранг $\forall$ С.З. - конечен.

2) При $q \geq 0$ для задачи Дирихле $\lambda_n > 0$ для $\forall\, n$.

3) С.Ф. ортогональны между собой с весом ρ: $\int v_n(M)v_m(M)\rho dV = 0$, $n \neq m$;

4) Теор. Стеклова о разл-е: произвольные 2ды непрерывные дифф-е в D ф-ции $f(M)$ уд. гр. условиям можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по С.Ф. $f(M) = \int_{n=1}^{\infty} f_n v_n(M)$,

$f_n = \frac{1}{||v_n||^2}\int_D f v_n \rho dV$

78. Применение метода Фурье в случае неоднородных граничных условий.

Решения $\begin{cases} \rho P_t[u] = Lu \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_S = \mu(P,t)|_{P\in S}, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0 \\ , \frac{\partial^k u}{\partial t^k}|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1..., l-1 \end{cases}$,

получить в виде $u(M,t) = U(M,t) + V(M,t)$.

$V(M)$ - удовлетворяет $\alpha\frac{\partial V}{\partial n} + \beta V|_S = \mu(P,t)|_{P_S}$

Тогда подставив $u(t)$ в исходную задачу получим:

$$\begin{cases} \rho P_t[U] = LU + f(M,t) \\ \alpha\frac{\partial U}{\partial n} + \beta U|_S = 0 \\ \frac{\partial^k U}{\partial t^k}|_{t=0} = -\frac{\partial^k V}{\partial t^k}|_{t=0}, \quad k = 0, 1..., l-1 \end{cases}, \text{ где } f(M,t) = LV - \rho P_t[V].$$

А эту задачу можно свести к двум:

$$\begin{cases} \rho P_t[U_1] = LU_1 \\ \alpha\frac{\partial U_1}{\partial n} + \beta U_1|_S = 0 \\ \frac{\partial^k U_1}{\partial t^k}|_{t=0} = -\frac{\partial^k V_1}{\partial t^k}|_{t=0}, \quad k = 0, 1..., l-1 \end{cases}, \begin{cases} \rho P_t[U_2] = LU_2 + f(M,t) \\ \alpha\frac{\partial U_2}{\partial n} + \beta U_2|_S = 0 \\ \frac{\partial^k U_2}{\partial t^k}|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1..., l-1 \end{cases}.$$

79. Первая формула Грина. Условия применимости?

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ - непрерывны вместе со своими первыми производными внутри $D + S$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри D.

Тогда $\iiint_D vLud\tau = \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - \iiint_D (k\mathrm{grad}u\mathrm{grad}v + qvu)\, d\tau$

80. Вторая формула Грина. Условия применимости?

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ - непрерывны вместе со своими первыми производными внутри $D + S$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри D.

Тогда $\iiint_D(vLu - uLv)d\tau = \iint_S \left(k(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma$

81. Третья формула Грина -

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\oint_D \frac{\Delta u}{R_{MM_0}}dV = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in D; \\ \frac{u(M_0)}{2}, & M_0 \in S; \\ 0, & M_0 \in D + S. \end{cases}$$

В "$2D$" $1/R \to \ln\frac{1}{R}$.

82. Пример постановки краевой задачи для уравнения Лапласа:

Ур-е Лапласа внутри круга $0 \leq r \leq a$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r \leq a, \\ P[u] \equiv \alpha\frac{\partial u}{\partial r} + \beta u|_{r=a} = f(\phi), & |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{cases}$$

83. Дайте определение гармонических функций. Приведите примеры.

Функция $u(M)$, непрерывная в области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа, называется гармонической в области

84. Сформулируйте теорему Гаусса для гармонических функций.

Если u - гармоническая в области D функция, то $\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$, где S - любая гладкая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области D.

85. Сформулируйте теорему о среднем для гармонических функций.

Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0- какая-нибудь точка, лежащая внутри области T, то имеет место формула

$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_0} ud\sigma$, где Σ_0- сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T.

86. Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой? Обоснуйте ответ.

Да, является. Следует из 3й формулы Грина.

87. Сформулируйте принцип максимума для гармонических функций.

Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальное и минимальное значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ.

88. Сформулируйте принцип сравнения для гармонических функций.

Если u и U непрерывны в области $T+\Sigma$, гармоничны в T и если $u \le U$ на Σ, то $u \le U$ всюду внутри T.

89. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?

Внутренняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.

От противного, построив функцию разности двух классических решений, и доказав что она тождественно равна нулю.

90. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?

Пусть $h(P) \ge 0$ на S, причем $h \ne 0$.

Третья краевая задача: $\begin{cases} \Delta u(M) = -F, & M \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = f \end{cases}$, где n - внешняя нормаль к поверхности S, не может иметь более одного классического решения.

Доказывается через 1ю формулу Грина.

91. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода? Обоснуйте ответ.

Если рассматривать вторую краевую задачу, т.е. $h \equiv 0$, то из ф-лы Грина получим $\mathrm{grad} u = 0$, откуда $u(M) = \mathrm{const}$, причем эта постоянная не определяется. Что означает, что классическое решение второй внутренней краевой задачи не единственно и опр-ся с точностью до произвольной const.

92. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае трех переменных.

Функция $u(x,y,z)$ называется регулярной на бесконечности, при достаточно большом $r \geq r_0$, if

$|u| \leq \frac{A}{r}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{A}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \frac{A}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leq \frac{A}{r^2}$.

93. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух переменных.

Функция $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности

94. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Внешняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

95. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

Внешняя задача Дирихле на плоскости не может иметь более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказывается "методом барьера".

96. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в двумерном случае?

Внешняя задача Неймана имеет решение, определенное с точностью до const, при $\oint_{\Gamma} f(P)dl = 0$.

97. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае?

Да, имеет. Из шести основных задач для уравнения Лапласа (трех внутренних и трех внешних) в трехмерном случае неединственное решение с точностью до постоянной имеет только внутренняя задача Неймана. Решение остальных краевых задач единственно.

98. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Функция $G(M,P)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, если:

1) $G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v$, v - гарм. в D.

2) $G(M,P)|_{P\in S} = 0$.

99. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае.

Функция $G(M, Q)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, если:

1) $G(M, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MQ}} + v$, v - гарм. в D.

2) $G(M, Q)|_{Q \in \Gamma} = 0$.

100.Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Функция $G(M, P)$ называется функцией Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа, если:

1) $G(M, Q) = \frac{1}{4\pi R_{MQ}} + v$, v - гарм. в D.

2) $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = -\frac{1}{S_0}$, S_0 - площадь пов-ти S.

101. Объемный потенциал.Основные свойства.

Интеграл $V(M) = \int_D \frac{\rho(Q)}{R_{MQ}} dV_Q$ называется объемным потенциалом.

Является обобщенным решением ур-я Пуассона $\Delta V = -4\pi\rho$

102. Теорема о равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Интеграл $V(M) = \int_D F(M, Q) f(Q) d\tau_Q$, равномерно сходящийся в точке M_0, есть непрерывная функция в точке M_0.

103. Поверхностный потенциал простого слоя -

интеграл вида $V(M) = \int_S \mu(P) \frac{dS_P}{R_{MP}}$

104. Поверхностный потенциал двойного слоя -

интеграл вида $W(M) = -\int_S v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{MP}} dS_P = \int_S v(P) \frac{\cos\phi}{R^2_{MP}} dS_P$.

105. Логарифмический потенциал простого слоя -

интеграл вида $V(M) = \int_D \rho(Q) \ln \frac{1}{R_{MQ}} d\sigma_Q$.

Решение ур-я $\Delta V = -2\pi\rho$.

106. Логарифмический потенциал двойного слоя.

интеграл вида $W(M) = -\int_C v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{R_{MP}} dl_P = \int_C v(P) \frac{\cos\phi}{R_{MP}} dl_P$.

107. Поверхности Ляпунова.

Поверхность называется поверхностью Ляпунова, если выполняются условия:

1. В каждой точке поверхности S существует определенная нормаль.

2. Существует такое число $d > 0$, что прямые, параллельные нормали в точке P поверхности S, пересекают не больше одного раза часть поверхности S, лежащую внутри шара радиуса d с центром P. Эти участки - окрестности Ляпунова.

3. Угол $\gamma(M, P) = (\mathbf{n}_M, \widehat{\mathbf{n}}_P)$ между нормалями в точках M и P, удовлетворяет следующему условию: $\gamma(M, P) \leq A R^{\delta}_{MP}$,

где A, $\delta = \text{const}$. $A > 0$, $0 < \delta \leq 1$.

108. Теорема о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.

Потенциал простого слоя с ограниченной непрерывной плотностью, заданной на гладкой поверхности, является непрерывной функцией во всем пространстве.

109. Теорема о существовании потенциала двойного слоя.

Потенциал двойного слоя $W(M) = \int_S \nu(P)\frac{\cos\phi}{R_{MP}^2}dS_P$ с непрерывной и ограниченной плотностью $|\nu| < C$ на поверхности S существует, т.е. является сходящимся несобственным интегралом при $M \in S$.

110. Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя? Обоснуйте ответ.

Нет. Потенциал непрерывен во всем пространстве ⇒ не имеет разрыва.

111. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей поверхности?

Потенциал $W(M) = -\int_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{MP}}dS_P$ имеет значение $4\pi\nu_0$ внутри несущей поверхности,$2\pi\nu_0$ на ней, и 0 вне ее.

112. Формула скачка потенциала двойного слоя при переходе через несущую поверхность.

$W_i(P) = \mathring{W}\ (P) + 2\pi\nu(P)$ $W_e(P) = \mathring{W}\ (P) - 2\pi\nu(P)$, где

$\mathring{W}$ - значение потенциала в $P_0 \in S$; $W_i(P)$ - предельное значение изнутри $\lim_{M\to P_0\in S}$, $\quad M \in D$;

$W_e(P)$ - предельное значение снаружи $\lim_{M\to P_0\in S}$, $\quad M \in D_e$;

$W_i(P) - W_e(P) = 4\pi\nu(P)$ - описывает скачок потенциала двойного слоя при переходе точки M через несущую поверхность S в точке P.

113. Два союзных интегральных уравнения Фредгольма, к которым сводятся внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа.

Внутренняя Дирихле $\nu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0), \quad P_0 \in S$.

Внешняя Неймана $\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0), \quad P_0 \in S$.

114. Напишите два союзных интегральных уравнения Фредгольма, к которым сводятся внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Внутренняя Неймана $\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0), \quad P_0 \in S$.

Внешняя Дирихле $\nu(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = \frac{1}{2\pi}f(P_0), \quad P_0 \in S$.

115. Теорема существования решения внутренней задачи Дирихле.

Внутренняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = f \end{cases}$ в D имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции f.

116. Теорема существования решения внешней задачи Неймана.

Внешняя задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n_e}|_S = f \end{cases}$ в D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции f.

117. Теорема существования решения внутренней задачи Неймана.

Внутренняя задача Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n_e}|_S = f \end{cases}$ в D имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции f.

118. Теорема существования решения внешней задачи Дирихле.

Внешняя задача Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = f \end{cases}$ в D_e имеет и притом единственное классическое решение при любой непрерывной функции f.

119. Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана - соотношение $\oint_S f(P)dS = 0$.

120. Потенциал Робена. Физический смысл?

$V(M) = \oint_S \mu_0(P)\frac{dS_P}{R_{MP}} \equiv 1$ в $D + S$.

Где μ_0 - с.ф. ур-я $\mu_0(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S U(P)\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\frac{1}{R_{PP_0}}dS_P = 0$.

Потенциал, создаваемый зарядом вдали на проводящей пов-ти, а его плотность - плотность зарядов. $\int_S \mu_0 dS$ - емкость поверхности.

121. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в двумерном случае.

Фундаментальным решением уравнения Гельмгольца $\Delta u + u = 0$

при $c = -\varkappa^2 < 0 : K_0(\varkappa R_{MM_0}) \sim \ln\frac{1}{\varkappa R_{MM_0}}$.

$c = k^2 > 0 : H_0^{(1,2)}(kR_{MM_0}),\ N_0(kR_{MM_0})$

В неограниченной области, при $c = k^2 > 0$: $H_0^{(1,2)}(kR_{MM_0})$.

122. Фундаментальное решение ур-я Гельмгольца в трехмерном случае.

Фундаментальным решением уравнения Гельмгольца $\Delta u + u = 0$

при $c = -\varkappa^2 < 0 : \frac{\exp(-\varkappa R_{MM_0})}{R_{MM_0}}$.

$c = k^2 > 0 : \frac{\exp(\pm ikR_{MM_0})}{R_{MM_0}}$.

123. Объемный потенциал уравнения Гельмгольца.

Интеграл $v(M) = \int_D \rho(Q)\frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}}dV_Q$ называется объемным потенциалом для уравнения Гельмгольца.

124. Потенциал простого слоя уравнения Гельмгольца.

Интеграл $V(M) = \int_S \mu(P)\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}dS_P$ называется потенциалом простого слоя для уравнения Гельмгольца.

125. Потенциала двойного слоя уравнения Гельмгольца.

Интеграл $V(M) = -\int_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}dS_P$ называется потенциалом двойного слоя для уравнения Гельмгольца

126. В каком случае выполняется ли принцип максимума для уравнения Гельмгольца?

Для уравнения $\Delta u + cu = 0$ принцип максимума имеет место при $c < 0$.

127. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.

Задача $\Delta u - \chi^2 u = 0$ в D, $u|_S = f$ не может иметь более одного классического решения.

128. Сформулируйте общую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа.

$$\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}(u)) + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_\infty$$
$$u(M,0) = \phi(M), \quad M \in \overline{D}$$
$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,\infty)$$

129. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения параболического типа.

Классическим решением начально-краевой задачи

$$\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}(u)) + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_\infty$$
$$u(M,0) = \phi(M), \quad M \in \overline{D}$$
$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,\infty)$$

называется функция $u(M,t)$, непрерывная со своими частными производными по координатам в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные 1го порядка по t и 2го по M в открытом цилиндре Q_∞, удовлетворяющая в Q_∞ ур-ю, начальному и граничному условию.

130. Сформулируйте принцип максимума для уравнения параболического типа.

Решение однородного уравнения теплопроводности $pu_t = \operatorname{div}(k^*\operatorname{grad}(u))$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q} = \overline{D} \times [0,T]$, во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений больших, чем максимальное из начального и граничного значений.

131. Принцип сравнения для уравнения параболического типа.

Если два решения уравнения теплопроводности $\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}(u)) + f(M,t)$, $(M,t) \in Q_\infty$ непрерывные в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, удовлетворяют условиям $u_1(M,0) \geq u_2(M,0)$, $M \in \overline{D}$ и $u_1(P,t) \geq u_2(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,T]$, то $u_1(M,t) \geq u_2(M,t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$

132. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа.

Задача
$$\begin{array}{c} \rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}(u)) + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_T \\ u(M,0) = \phi(M), \quad M \in \overline{D} \\ u(P,t) = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,\infty) \end{array}$$
может иметь только одно классическое решение.

133. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа.

Задача
$$\begin{array}{c} \rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}(u)) + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_T \\ u(M,0) = \phi(M), \quad M \in \overline{D} \\ u(P,t) = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,\infty) \end{array}$$
может иметь только одно классическое решение. Классическое решение устойчиво по начальным и граничным значениям в равномерной норме.

134. Теорема существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.

Пусть функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, имеет на нем кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\phi(0) = \phi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le t \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le t < \infty, \end{cases}$$
, представимое рядом

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n^2}{l}\right)a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$

с коэффициентами $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 1, 2...$

135. Функция Грина для уравнения теплопроводности в ограниченной области в случае граничных условий Дирихле.

$G(M,Q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q)$, при $t \ge 0$ и $G \equiv 0$ при $t < 0$ (функция источника).

136. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in R^1 \end{cases}$$

137. Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каким методом она доказывается?

Задача $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in R^1 \end{cases}$ может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{\Omega}$

От противного.

138. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Если $\phi(x)$- непрерывная и ограниченная на бесконечной прямой R^1 функция, то формула $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\phi(x,\xi,t)d\xi$ опр-т при $(x,t) \in \overline{\Omega}$ классическое решение задачи $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in R^1 \end{cases}$.

139. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Функция $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности в одномерном случае.

140. Перечислите основные свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

1) $G(x,\xi,t)$ определена при $t > 0$ и положительна: $G(x,\xi,t) > 0$;

2) удовлетворяет по переменным x и t однородному уравнению теплопроводности.

3) $G(x,\xi,0) = \delta(x,\xi)$.

141

142. Что такое "парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?

Когда начинаем рассматривать задачу на бесконечной прямой, то в любой момент времени $t > 0$, сколь угодно близкий к $t_0 = 0$ у нас в любой, пусть даже самой удаленной точке, температура будет хоть и мала, но все же отлична от нуля. Подобный факт можно интерпретировать как бесконечно быстрое распространение тепла, что противоречит молекулярно кинетической теории.

Объясняется этот парадокс тем, что при выводе уравнений теплопроводности не учитывается инерциальность процесса движения молекул. Проще говоря, модель немного "кривая".

143. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_{++} \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \overline{R}^+ \\ \alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = 0, & t \in [0,\infty), |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{cases}.$$

144. В чем заключается "метод продолжения"для построения решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой?

Пусть функция $\Phi(x)$ определена на бесконечной прямой $(-\infty,\infty)$, имеет на ней ограниченные производные до n-го порядка включительно, и линейная комбинация $\sum_{k=0}^{N} a_k\Phi^{(k)}(x)$, где $a_k = \text{const}$, $k = 0, 1, .., N$ нечетна относительно точки $x = 0$. Тогда функция $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Phi(\xi)d\xi$ удовлетворяет условию $\sum_{k=0}^{N} a_k\frac{\partial^k u}{\partial x^k}|_{x=0} = 0$.

145. Функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле.

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}$$

146. Функция Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Неймана.

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}$$

147. Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий.

Функция $u(x,t) = \int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$ является общим решением задачи $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), & (x,t)\in\Omega_+ \\ u(x,0) = 0, & x\in\overline{R}^+ \\ u_x(0,t) = 0, & t\in[0,T] \end{cases}$.

148. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности в пространстве.

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(M,t), & (M,t)\in\Omega_3 \\ u(M,0) = \phi(M), & M\in R^3 \end{cases}.$$

149. Сформулируйте теорему единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.

150. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.

Если функция $\phi(M)$ непрерывна и ограничена во всем трехмерном пространстве R^3, то формула $u(M,t) = \int_{R^3} G(M,Q,t)\phi(Q)dV_Q$ определяет при $(M,t)\in\Omega_3$ классическое решение задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(M,t), & (M,t)\in\Omega_3 \\ u(M,0) = \phi(M), & M\in R^3 \end{cases} \quad \text{при } f(M,t)\equiv 0.$$

151. Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле.

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, & (x,t)\in\Omega_{++} \\ u(x,0) = 0, & x\in R^2 \\ u(0,t) = \mu(t), & t\geq 0, \quad \mu_0\neq 0 \\ |u(x,t)|\leq C \quad C>0 & (x,t)\in\overline{\Omega}_{++} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{\mu(t)}{(t-\tau)^{3/2}}d\tau.$$

152. Сформулируйте принцип Дюамеля.

Решение задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_{++} \\ u(x,0) = 0, & x \in R^2 \\ u(0,t) = \mu(t), & t \geq 0, \quad \mu_0 \neq 0 \\ |u(x,t)| \leq C \quad C > 0 & (x,t) \in \overline{\Omega}_{++} \end{cases}$$

можно представить в виде $u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, t-\tau)\mu(\tau)d\tau$,

где W находится из:

$$\begin{cases} W_t = a^2 W_{xx}, & (x,t) \in \Omega_{++} \\ u(x,0) = 0, & x \in \overline{R}^+ \\ W(0,t) = 1, & t \geq 0 \\ |W(x,t)| < M, & (x,t) \in \Omega_{++} \end{cases}$$

153. Поставьте общую начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа.

Определить $u(M,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0,T]$, удовл-ю:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mathrm{div}(k\mathrm{grad}u) - qu + f, & (M,t) \in \Omega_\infty \\ u(M,0) = \phi(M), \quad u_t(M,0) = \psi(M), & M \in \overline{D} \\ \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t) & P \in S, \quad t \in [0,\infty) \\ |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{cases}$$

154. Дайте определение классического решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа.

Классическим решением:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mathrm{div}(k\mathrm{grad}u) - qu + f, & (M,t) \in \Omega_\infty \\ u(M,0) = \phi(M), \quad u_t(M,0) = \psi(M), & M \in \overline{D} \\ \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P,t) & P \in S, \quad t \in [0,\infty) \\ |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{cases}$$

называется ф-ция $u(M,t)$, непрерывная вместе с 1ми производными в $\overline{Q}_\infty$, имеющая непрерывные производные 2го порядка в Q_∞, удовл-й в Q_∞ исходной задаче.

155. Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?

Начально-краевая задача может иметь только одно классическое решение.

Доказывается от противного.

156. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке в случае однородных граничных условий Дирихле.

Пусть начальные функции задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega_l = (0,l) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(M), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty) \end{cases}$$

$\phi(x)$ - 2ды дифф-ма на $[0,l]$ и имеет кусочно-непрерывную 3ю производную, ф-ция $\Psi(x)$ - непрерывна дифф-ма на $[0,l]$ и имеет кусочно-непрерывную 2ю производную, $\phi(0) = \phi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, тогда $\exists$ классическое решение задачи,представляемое ф-й

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\} \sin \sqrt{\lambda_n} x,$$

$$\omega_n = \frac{\pi a n}{l}, \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$$

$$a_n = \phi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi,$$

$$b_n = \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} \xi d\xi.$$

157. Дайте определение функции влияния мгновенного точечного импульса (функции Грина) для уравнения колебаний на отрезке.

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \sin \omega_n t, \ \omega_n = \frac{\pi a n}{l}.$$

158. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(M), \quad x \in R^1, \\ \Omega = R^1 \times (0,\infty), \quad \overline{\Omega} = R^1 \times [0,\infty) \end{cases}$$

159. Напишите формулу Даламбера.

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

160. В чем состоит метод распространяющихся волн?

161. Теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для однородного ур-я колебаний на бесконечной прямой.

$\sqsupset$ $\phi(x)$ 2ды непрерывно дифф-ма, а $\psi(x)$ - непрерывно дифф-ма на R^1. Тогда класс-е решение задачи Коши существует, единственно и определяется формулой Даламбера.

162. Сформулируйте теорему устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебаний на бесконечной прямой.

$\sqsupset$ начальные функции $\phi_s(x)$ и $\psi_s(x)$, $(s = 1,2)$ 2х задач Коши уд. усл-м

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \le \varepsilon, \quad x \in R^1,$$

$$\int_a^b |\psi_1(z) - \psi_2(z)|^2 dz \le \varepsilon^2 (b-a)$$

$\forall$ конечных a и b $(a < b)$.

Тогда для решения этих задач при $t \in [0,T]$:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon(1+T), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

163. Что такое "характеристический треугольник"на фазовой плоскости?

164. В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?

$\sqsupset$ $\exists$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(M), & x \in R^1, \\ \Omega = R^1 \times (0,\infty), \quad \overline{\Omega} = R^1 \times [0,\infty) \end{cases}$$

Тогда построив хар-й тр-к, проинтегрируем ур-е колебаний по треугольнику. Умножим на $\frac{1}{2a}$ и применяя формулу Грина получим решение задачи.

165. Напишите общую формулу решения начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-at}^{x+at} f(\xi,\tau) d\xi d\tau.$

166. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

$\sqsupset$ ф-ция $f(x,t)$ - непрерывно дифф-ма в обл-ти Ω: $f(x,t) \in C^{(1)}(\Omega)$. Тогда классическое решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega = R^1 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & x \in R^1. \end{cases}$$

существует, единственно и опр-ся ф-й:

$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-at}^{x+at} f(\xi,\tau) d\xi d\tau.$

167. В чем состоит "метод продолжения"построения решения начально-краевой задачи на полупрямой в случае однородных граничных условий Дирихле и Неймана?

Для Дирихле: ф-ции $\phi(x)$, $\psi(x)$ продолженные нечетным образом на ∞ прямую.

$u(x,t) = \frac{\phi_1(x+at)+\phi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)dz$ - решение задачи.

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

или в исходных ф-ях:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, & 0 < t \le \frac{x}{a}, \quad x > 0, \\ \frac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, & t \ge \frac{x}{a}, \quad x > 0, \end{cases}$$

Для Неймана: ф-ции $\phi(x)$, $\psi(x)$ продолженные четным образом на ∞ прямую.

$u(x,t) = \frac{\phi_2(x+at)+\phi_2(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_2(z)dz$ - решение задачи.

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ \phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

или в исходных ф-ях:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, & 0 < t \le \frac{x}{a}, \quad x > 0, \\ \frac{\phi(x+at)+\phi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_0^{x+at} \psi(z)dz + \int_0^{at-x} \psi(z)dz\right\}, & t \ge \frac{x}{a}, \quad x > 0, \end{cases}$$

168. Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае однородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле. Каким методом можно его получить?

Задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega_+, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \overline{R}^+. \\ u(0,t) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty) \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = f(x - at)$.

И из начальных и гр-го усл-й получаем:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

169. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad (M,t) \in \Omega_3 = R^3 \times (0,T], \\ u(M,0) = \phi(M), \quad u_t(M,0) = \psi(M), \quad M \in R^3 \end{cases}$$

170. Напишите формулу Кирхгофа.

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P} \left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R} + \frac{1}{aR} \frac{\partial u}{\partial t} \left(P, t_0 - \frac{R}{a}\right) \frac{\partial R}{\partial n_P} \right\} dS_P + \frac{1}{4\pi a^2} \int_D \frac{f\left(M, t_0 - \frac{R_{M_0M}}{a}\right)}{R_{M_0M}} dV_M, \ R = R_{M_0P}.$$

171. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве.

Решение однородного ур-я колебаний в неограниченном пр-ве - ф-ла Пуассона:

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \oint_{S_{at}^M} \frac{\phi(P)}{R_{MP}} dS_P + \oint_{S_{at}^M} \frac{\psi(P)}{R_{MP}} dS_P \right\}$$

172. В чем состоит "метод спуска"?

Получение из формулы решения с большим числом переменных формулы решения с меньшим.

173. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в двумерном пространстве.

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{U_{at}^M} \frac{\phi(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \int_{U_{at}^M} \frac{\psi(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \right\} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{U_{a\tau}^M} \frac{f(\xi,\eta,t-\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(a\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}};$$

U_{at}^M-круг радиуса at с центром в M.