Кинематика

1.

а) $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$;

$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$;

в) $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$;

$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$;

г) $\vec{r} = r\vec{e}_r$;

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$;

2.

$$J_{ij} = \int \rho\, dV \left(x_\ell^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right);$$

а) $J_{11} = 0$; $J_{22} = J_{33} = \frac{M\ell^2}{12}$ $\left(\frac{M\ell^2}{3}\right)$

б) $J_{11} = J_{22} = \frac{MR^2}{4}$; $J_{33} = \frac{MR^2}{2}$;

в) $J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{5}MR^2$;

$$\boxed{T = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}J_{ik}\Omega_i\Omega_k}$$

Механика Лагранжа

4. $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{д} \quad (j = 1, 2, \dots, S)$$

5. $$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ ; \text{ Если } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \text{ и } Q_j^{д} = 0, \text{ то } p_j = p_{j0}$$

6. $$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}$$

Если $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ и $Q_j^{д}\ (j = 1, 2, \dots, S) = 0$, то

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$$

7.

а) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\vec{r}, t)$; $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$,

б) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t)$;

в) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, z, t)$;

г) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - U(r, t)$;

8. а) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$;

$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$; $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$;

б) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{c} x H_0 \dot{y}$;

в) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{1}{2}\frac{e}{c}\rho^2 H_0 \dot{\varphi}$;

везде используется постоянный вид. вектор-потенциал

$$\boxed{\vec{A} = x H_0 \vec{e}_y\ ;\ \varphi = -E_0(\vec{r}\,\vec{n})}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - e\varphi + \frac{1}{2}\frac{e}{c} H_0 r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2;$$

$\vec{A}_g = -\frac{1}{2} H_0 y \vec{e}_x$ или $\frac{1}{2} H_0 x \vec{e}_y$; $\vec{A}_y = \frac{1}{2} H_0 \rho \vec{e}_\varphi$, $\vec{A}_\varphi = \frac{1}{2} H_0 r \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$

Теория Колебаний.

9. q_0 – ТУР. $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0}=0$ $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0}>0.$

$$T=\frac{1}{2}T_0\dot{x}^2 \quad x=q-q_0 \quad U=\frac{1}{2}U_0x^2;$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}T_0\dot{x}^2-\frac{1}{2}U_0x^2; \quad T_0\ddot{x}+U_0x=0.$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0. \quad x=A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t$$

$$q=q_0+A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t;$$

10. $f=-\alpha\dot{x}$, $\alpha>0.$

$$T_0\ddot{x}+U_0x+\alpha\dot{x}=0. \quad \lambda=\frac{\alpha}{2T_0};$$

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0.$$

$$x=Ae^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t+\alpha\right).$$

11. $U_e(x,t)$; $\mathcal{L}=\frac{1}{2}T_0\dot{x}^2-\frac{1}{2}U_0x^2+xF(t)$

$$F(t)=-\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}. \quad \ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{1}{T_0}F(t)$$

пусть $F(t)=f\cos(\gamma t+\beta)$, тогда:

$$x=A\cos(\omega_0t+\alpha)+\frac{f}{T_0(\omega_0^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta).$$

оно не годится для резонанса! ($\omega_0=\gamma$).

12. q_{i0} – ТУР $\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_{i0}}=0$ $\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}\right|>0$

удовл. кр. Сильвестра.

$x_i=q_i-q_{i0}$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(T_{0ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-U_{0ik}x_ix_k\right)$$

$i=1\ldots s$ $$\sum_k T_{0ik}\ddot{x}_k+\sum_k U_{0ik}x_k=0.$$

1. Ищем в виде $A_k e^{i\omega t} = x_k$
2. Из $|T_{oik} - \omega_o^2 V_{oik}| = 0$ находим ω_o^2. (*)
(собственные частоты).
3. подставляем ω_α $\alpha = 1..S$ в (*)

4. $x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \theta_\alpha$; $\theta_\alpha = Re\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$.
$\Delta_{k\alpha}$ – миноры (*).

Нормальные колебания $\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta = 0$.
где $\theta_i \to x_i$

13. $f_i = -\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$, где $F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$

F - диссипативная ф-ия.

(*) $\sum_k T_{oik} \ddot{x}_k + \sum_k V_{oik} x_k = f_i$; $x_k = A_k e^{rt}$;
далее $\det((*) \leftarrow x_k) = 0$ находим r;

14. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j T_{oij} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j V_{oij}$,
тогда:

$$\frac{1}{2}\sum_i \ddot{x}_i T_{oij} + \frac{1}{2}\sum_i x_i V_{oij} = f_i(t);$$

1. решаем однородную систему через нормальные колебания.
2. записываем ур-ие движения через нормальные колебания.
3. решаем неоднородн. систему. окончат. находим решение.

Механика Гамильтона.

15. $\mathcal{E}^{\text{обоб}}(q_i, \dot q_i \to p_i, t) = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$;

$Q_i^d = 0$:
$$\begin{cases} ① \; q_{i*} \text{ — цикл. } \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i*}} = 0\right) \\ \qquad \Rightarrow \dot p_{i*} = 0 \Rightarrow p_{i*} = \text{Const} \\ ② \; \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}^{\text{об}}}{dt}, \text{ если } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \text{const}. \end{cases}$$

16. а) $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec r, t)$,

б) $\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U$;

в) $\mathcal{H} = \frac{p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho}\right)^2 + p_z^2}{2m} + U$,

г). $\mathcal{H} = \frac{p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{r\sin\theta}\right)^2}{2m} + U$.

17. а) $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + e\varphi$.

б) $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2 + \left(p_y - \frac{e}{c}\cdot\frac{1}{2}H_0 x\right)^2\right) + e\varphi$

в) $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + p_z^2 + \left(p_\varphi/\rho - \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0\rho\right)^2\right) + e\varphi$

г) $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{r\sin\theta} - \frac{1}{2}\frac{e}{c}H_0 r\sin\theta\right)^2\right) + e\varphi$

$\vec E = -\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}$; $\vec A = \frac{1}{2}[\vec H \vec r]$.

18. $$\begin{cases} \dot q_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot p_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + Q_i^d \end{cases}$$ 2s уравнений.

19. $f(q_\alpha(t), p_\alpha(t), t)$; $g(q_\alpha(t), p_\alpha(t), t)$; $\alpha = 1, \dots, s$

$$\{f, g\} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$\{q_i, q_j\} = 0 \ ; \quad \{p_i, p_j\} = 0.$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad , \ i, j = 1, 2, 3, \dots, s$$

21.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \ ;$$

из всех возможных движений между фиксир. точками t_1 и t_2 система выберет такое, чтобы $\delta S = 0$.

1. $p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$; $P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}$; $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$;

$F = F(q_\alpha, Q_\alpha, t)$ – производящая функ.

2. $p_\alpha = + \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}$; $Q_\alpha = \frac{\partial G}{\partial P_\alpha}$; $H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}$;

$G = G(q_\alpha, P_\alpha, t)$;

необх. и дост. условие каноничности – сохр. значения фундамент. скобок.

20. $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \Rightarrow f$ – инт. дв.

22. H КП $H' = 0$ $\quad \dot{P}_i = 0, \ \dot{Q}_i = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i, \ Q_i = \beta_i$

найдём $G(q_i, P_i, t)$ – ?

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \ (1) \qquad Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i} \ (2) \qquad H' = H + \frac{\partial G}{\partial t};$$

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t} + H\left(q_i, p_i \overset{(1)}{=} \frac{\partial G}{\partial q_i}, t\right) = 0.}$$

23.

1. ур. Г-Я в общем виде, $\mathcal{H}$.

2. находим полный интеграл ур-ие (решение для s+1 const):

$$G = G(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t) + A.$$

3. теорема Якоби:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} = \beta_i \Rightarrow q_i = q_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s, t).$$

Как искать полный интеграл:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_i, p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, t\right) = 0.$$

1. $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = E$; $\frac{\partial G}{\partial t} + E = 0$

$$G = -Et + \tilde{G}(q_i)$$

2 q_i - цикл. $\Rightarrow p_i = \text{const}$;

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$G = q_i p_i + f(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_s, t);$$

3. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1(q_i, p_i, t) + \tilde{\mathcal{H}}(q_1, p_1, \ldots, \ldots, t)$;

$$G = G_1(q_i, t) + \tilde{G}(q_1, \ldots, t);$$

$$\underbrace{\frac{\partial G_1}{\partial t} + \mathcal{H}_1\left(q_i, \frac{\partial G_1}{\partial q_i}, t\right)}_{\lambda''} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \tilde{\mathcal{H}}(\ldots)}_{-\lambda''} = 0$$