

**КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ****1.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ**

Основными кинематическими мерами движения в механике материальной точки и системы материальных точек являются скорости и ускорения поступательного движения. Механические движения в кинематике изучаются на основе их геометрических свойств, т. е. без учета масс тел и действующих на них сил. Методы кинематики и установленные в ней зависимости используются при исследовании задач кинематики, а также в задачах динамики.

Движение любого объекта в кинематике изучается по отношению к некоторому выделенному телу (телу отсчета), с которым связывается система отсчета (СО), позволяющая определить положение движущегося объекта в разные моменты времени относительно тела отсчета. Важно, что выбор СО в кинематике произволен и зависит от целей исследования. Задачей кинематики является установление (с помощью математических методов) способа задания движения материальных точек и определение соответствующих кинематических характеристик движения (траектории, скорости, ускорения движущихся точек).

Положение материальной точки относительно системы отсчета  $S$  может быть задано с помощью радиус-вектора точки как функции времени  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Конец этого радиус-вектора описывает в пространстве кривую (считаем, непрерывную), которая называется годографом вектора  $\vec{r}$  и является траекторией точки. Радиус-векторы точек, их скорости и ускорения можно задавать в различных координатах. Это и есть различные способы задания движения тел. Заметим, что векторное уравнение  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  параметрически задает траекторию в пространстве. Годограф вектора  $\vec{r}(t)$  есть геометрическое место концов векторов  $\vec{r}(t)$ , откладываемых от общего начала  $O$ . Исключив из векторного уравнения  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  переменную  $t$ , найдем уравнение траектории в виде линии пересечения двух поверхностей, например  $y = f_1(x), z = f_2(x)$ . Если разрешенные относительно  $y$  и  $z$  уравнения записать нельзя, то траекторию можно представить в виде пересечения двух поверхностей общего вида:  $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ .

Скорость точки относительно  $S$  определяется как производная от радиуса-вектора по времени. Обозначим ее как  $\dot{\vec{r}}$ .

Производная от вектора скорости точки  $\dot{\vec{r}}$  по времени называется ускорением точки относительно  $S$ ; ускорение будет обозначать вектором  $\ddot{\vec{r}}$ . Очевидно, скорость точки направлена по касательной к годографу радиус-вектора, а ускорение направлено по касательной к годографу вектора скорости точки.

Кроме этих кинематических характеристик движения в механике материальной точки вводится и используется понятие секторной скорости точки  $\vec{\sigma}$ , которая определяется как векторное произведение двух полярных векторов  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  и является, таким образом, аксиальным вектором (псевдовектором)<sup>1</sup>:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} [\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}]. \quad (1.1)$$

Представим  $\vec{\sigma}$  в виде

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \left[ \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{d\vec{S}}{dt}, \quad (2.1)$$

где  $d\vec{r}$  - вектор, характеризующий элементарное перемещение точки, а модуль аксиального вектора  $d\vec{S}$  равен площади, описанной радиус-вектором  $\vec{r}$  при перемещении точки на  $d\vec{r}$ . Поэтому модуль секторной скорости характеризует площадь, очерчиваемую радиус-вектором в единицу времени (см. рис. 1.1).

Запишем выражения  $\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t)$  и  $\vec{\sigma}(t)$  в различных координатах.

## 1.2. ДЕКАРТОВА (ПРАВАЯ) СИСТЕМА КООРДИНАТ

Напомним, что в правой системе за положительное принимается направление отсчета углов (поворотов) против часовой стрелки. Радиус-вектор точки как функция времени задается тремя координатами  $x(t), y(t), z(t)$ , являющимися также функциями времени. Вводя единичные векторы  $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$  вдоль осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно, представим  $\vec{r}(t)$  в виде

---

<sup>1</sup> При инверсии координатных осей  $(x, y, z)$  все компоненты полярного вектора изменяют знак, в то время как компоненты аксиального вектора при такой операции знака не меняют. Примеры полярных векторов: радиус-вектор  $\vec{r}$ , скорость  $\dot{\vec{r}}$  и т. д. Аксиальные векторы - секторная скорость  $\vec{\sigma} = \frac{1}{2} [\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}]$ , момент импульса  $\vec{L} = m [\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}]$ . Вообще, вектор, построенный как векторное произведение двух полярных векторов, является аксиальным вектором. Аксиальный вектор называют также псевдовектором.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{n}_x + y(t)\vec{n}_y + z(t)\vec{n}_z. \quad (3.1)$$

Функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  - компоненты радиус-вектора, т. е. декартовы координаты точки.

Дифференцируя (3.1) по времени с учетом равенств  $\dot{\vec{n}}_x = \dot{\vec{n}}_y = \dot{\vec{n}}_z = 0$ , получим разложение вектора скорости точки по ортам декартовой системы координат:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{n}_x + \dot{y}(t)\vec{n}_y + \dot{z}(t)\vec{n}_z = \vec{v}. \quad (4.1)$$

И аналогично получим вектор ускорения точки:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{n}_x + \ddot{y}(t)\vec{n}_y + \ddot{z}(t)\vec{n}_z = \vec{w}. \quad (5.1)$$

Для справочных целей напомним следующее представление вектора  $\vec{\sigma}$ :

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{2} \vec{n}_x + \frac{z\dot{x} - x\dot{z}}{2} \vec{n}_y + \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{2} \vec{n}_z = \sigma_x \vec{n}_x + \sigma_y \vec{n}_y + \sigma_z \vec{n}_z, \quad (6.1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - компоненты секторной скорости вдоль декартовых осей.

### 1.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Положение точки в пространстве в момент времени  $t$  можно определить тройкой величин  $\rho(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $z(t)$ , которые являются цилиндрическими координатами точки (рис. 2.1). Формулы преобразования от декартовых координат к цилиндрическим и обратно имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (7.1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (8.1)$$

Это так называемые точечные преобразования; формулы этих преобразований содержат только координаты (“старые” и “новые”), но не содержат явным образом временной переменной. Последнее означает, что обе системы координат описывают движение точки в одной и той же (неподвижной) системе отсчета. Области изменения цилиндрических координат:  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Координатные поверхности в цилиндрической системе<sup>2</sup>:  $\rho = c_1$  - семейство цилиндров кругового сечения радиуса  $\rho$  с осью  $Oz$ ;  $\varphi = c_2$  - семейство полуплоскостей, исходящих из оси  $Oz$ , в которых лежат радиус-вектор точки  $\vec{r}(t)$  и ось  $Oz$ ;  $z = c_3$  - семейство плоскостей, перпендикулярных  $Oz$ . Линия пересечения двух

---

<sup>2</sup> Координатными поверхностями в декартовой системе называют плоскости, перпендикулярные осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и образующие три семейства взаимно перпендикулярных плоскостей.

каких-либо координатных поверхностей различных семейств называется координатной линией. Так как вдоль каждой координатной линии меняется только одна координата, то ее и называют соответствующей координатой. Очевидно, координатные линии  $\varphi$  - это концентрические окружности, координатные линии  $\rho$  - это полупрямые (лучи), исходящие из начала координат  $O$  (см. рис. 2.1), координатные линии  $z$  - прямые, параллельные оси  $Oz$ . Так как координатные линии  $\varphi$  не являются прямыми, цилиндрические координаты относятся к криволинейным. Очевидно, что три координатные линии, которые определяют точку пространства  $\rho, \varphi, z$ , пересекают друг друга под прямыми углами, т. е. цилиндрические координаты являются ортогональными координатами.

Касательная, проведенная к данной точке координатной линии, называется координатной осью. Все три оси цилиндрической системы координат ортогональны друг другу. Отложим по этим осям единичные векторы  $\vec{n}_\rho, \vec{n}_\varphi, \vec{n}_z$  в направлении возрастания координат и разложим радиус-вектор точки по ортам цилиндрических координат:

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{n}_\rho + z(t)\vec{n}_z. \quad (9.1)$$

Из рис. 2.1 видно, что орты цилиндрических координат связаны с ортами декартовых координат соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{n}_\rho &= \vec{n}_x \cos \varphi + \vec{n}_y \sin \varphi, \\ \vec{n}_\varphi &= -\vec{n}_x \sin \varphi + \vec{n}_y \cos \varphi, \\ \vec{n}_z &= \vec{n}_z. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Отсюда видно, что при перемещении точки относительно  $S$  положение ортов  $\vec{n}_\rho, \vec{n}_\varphi$ , изменяется вследствие изменения угла  $\varphi$ . Действительно, вычислим  $\dot{\vec{n}}_\rho$  и  $\dot{\vec{n}}_\varphi$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{n}}_\rho &= -\vec{n}_x \dot{\varphi} \sin \varphi + \vec{n}_y \dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{\varphi} \vec{n}_\varphi, \\ \dot{\vec{n}}_\varphi &= \vec{n}_x \dot{\varphi} \cos \varphi - \vec{n}_y \dot{\varphi} \sin \varphi = -\vec{n}_\rho \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Дифференцируя (9.1) по  $t$  и учитывая (11.1), находим разложение вектора скорости точки по ортам цилиндрической системы координат:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{n}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{n}_\varphi + \dot{z} \vec{n}_z. \quad (12.1)$$

Аналогично, дифференцируя  $\dot{\vec{r}}$  по  $t$  и учитывая (11.1), получим

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{n}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) \vec{n}_\varphi + \ddot{z} \vec{n}_z. \quad (13.1)$$

Таким образом, проекции скорости и ускорения точки на координатные оси  $(\rho), (\varphi), (z)$

ИМЕЮТ ВИД

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \\ w_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \quad w_z = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Приведем также разложение вектора секторной скорости точки по ортам цилиндрической системы координат:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{n}_\rho & \vec{n}_\varphi & \vec{n}_z \\ \rho & 0 & z \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\varphi} & \dot{z} \end{vmatrix} = -\frac{z\rho\dot{\varphi}}{2} \vec{n}_\rho + \frac{\dot{\rho}z - \dot{z}\rho}{2} \vec{n}_\varphi + \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2} \vec{n}_z = \sigma_\rho \vec{n}_\rho + \sigma_\varphi \vec{n}_\varphi + \sigma_z \vec{n}_z. \quad (15.1)$$

Из (14.1) и (15.1) следует, что

$$w_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma_z}{dt}. \quad (16.1)$$

Рассмотрим далее важный случай движения, при котором секторная скорость точки остается постоянной, т. е.  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0$ . Введем цилиндрическую систему координат с осью Oz, направленной по вектору  $\vec{\sigma}_0$ . Так как  $\vec{\sigma}_0 = \frac{1}{2} [\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}]$ , то и радиус-вектор  $\vec{r}(t)$  и скорость точки  $\dot{\vec{r}}(t)$  в любой момент времени лежат в плоскости, ортогональной вектору  $\vec{\sigma}_0$ . В этом случае проекции скоростей  $v_\rho, v_\varphi$  и ускорений  $w_\rho, w_\varphi$  можно непосредственно выразить как функции  $\rho$  и  $\varphi$ , а не  $\dot{\rho}, \dot{\varphi}$  и  $\ddot{\rho}, \ddot{\varphi}$ , а также через производные по  $\varphi$  функции  $\rho(\varphi)$ . Действительно, в выбранной системе координат имеем

$$\sigma_z = \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2} = \sigma_0, \quad (17.1)$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \rho^2 \dot{\varphi} = -2\sigma_0 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right),$$

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho}. \quad (18.1)$$

Значит,

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = 2\sigma_0 \left\{ -\vec{n}_\rho \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \vec{n}_\varphi \frac{1}{\rho} \right\}. \quad (19.1)$$

Далее из (16.1) имеем  $w_\varphi = 0$ , а

$$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt} \dot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right), \quad (20.1)$$

$$\rho\dot{\varphi}^2 = 4\sigma_0^2 / \rho^3.$$

Так что

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{w}} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right\} \vec{n}_\rho. \quad (21.1)$$

Формулы (19.1) и (21.1) называют первой и второй формулами Бине соответственно. Они оказываются полезными при исследовании различных случаев движения материальной точки в центрально-симметричном силовом поле.

Пример. Траектории точек являются плоскими и определяются уравнениями

$$\text{а) } \rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \text{б) } \rho = \frac{p'}{1 + \varepsilon' \cos \gamma(\varphi - \varphi_0)},$$

$p$  - параметр,  $\varepsilon$  - эксцентриситет эллипса, секторная скорость  $\sigma_0$ . Начало цилиндрических координат помещено в фокусе эллипса. Определить ускорения точек.

Прежде всего, заметим, что траектории точек различны. Так, в случае а) точка движется по эллипсу (рис. 3.1, а), в то время как в случае б) траектория представляет собой розетку и не обязательно является замкнутой кривой (рис. 3.1, б).

По второй формуле Бине, дважды дифференцируя  $\rho^{-1}$  по  $\varphi$ , находим

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho} \quad \text{и} \quad w_\rho = -4\sigma_0^2 / p\rho^2 \quad \text{в случае а),}$$

$$\text{а) } \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\varepsilon' \gamma^2}{p} \cos \gamma(\varphi - \varphi_0) = \gamma^2 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho} \right) \quad \text{и} \quad w_\rho = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \left( \frac{1 - \gamma^2}{\rho} + \frac{\gamma^2}{p} \right) \quad \text{в случае б).}$$

Отличие в ускорениях точек согласно уравнениям движения  $m\ddot{\vec{w}} = \vec{F}$  означает, что действующие на точки в случаях а) и б) силы имеют разные законы убывания с расстоянием от центра силы до точки. В частности, в случае б) сила  $\vec{F} \sim \left( \frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho^3} \right) \vec{n}_\rho$ .

Если речь идет о движении планет в гравитационном поле Солнца, то мы видим, что в случае б) перигелий планеты при каждом обороте смещается на величину  $\Delta\varphi = 2\pi / \gamma$ .

Пример. *Определение радиус-вектора точки по скорости*

Определить закон движения, траекторию и ускорение точки, движущейся по плоской траектории с постоянной секторной скоростью, если  $|\vec{v}| = \frac{v_0 \rho_0}{\rho}$ , где  $\rho$  - расстояние от точки до центра,  $\rho_0 = \rho(0)$ ,  $v_0 = |\vec{v}(0)|$ , причем угол между векторами  $\vec{r}(0)$  и  $\vec{v}(0)$  равен  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ).

Направим полярную ось от центра к точке так, чтобы при  $t = 0$   $\varphi(0) = 0$ , тогда

$\rho^2 \dot{\varphi} = 2\sigma_z = \rho_0 v_0 \sin \alpha$ ,  $v = \frac{\rho_0 v_0}{\rho}$ , а  $\dot{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{\rho_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{\rho^2} = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^2}$ . Отсюда

$\frac{d\rho}{dt} = + \frac{v_0 \rho_0}{\rho} \cos \alpha$ , так как если  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\dot{\rho}_0 > 0$ . Разделяя переменные

$$\rho d\rho = v_0 \rho_0 \cos \alpha dt$$

и интегрируя, получим

$$\frac{\rho^2}{2} = v_0 \rho_0 \cos \alpha t + \frac{\rho_0^2}{2}, \quad \rho^2 = \rho_0^2 \left( 1 + \frac{2v_0 \cos \alpha t}{\rho_0} \right).$$

Далее найдем  $\dot{\varphi}$ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0 \sin \alpha}{\rho_0 \left( 1 + \frac{2v_0 \cos \alpha t}{\rho_0} \right)}.$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \ln \left( 1 + \frac{2v_0 \cos \alpha t}{\rho_0} \right),$$

или

$$\varphi = \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0 e^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Ускорение точки найдем по формуле Бине в виде:

$$\vec{w} = -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} \vec{n}_\rho.$$

#### 1.4. ЕСТЕСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим в качестве аргумента радиус-вектора точки длину дуги траектории  $s$ , отсчитывая ее от начальной точки, соответствующей моменту времени  $t = t_0$ , в направлении движения точки. Сама длина дуги задается, таким образом, как функция времени. Движение точки описывается векторной и скалярной функциями:

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad s = s(t). \quad (22.1)$$

Описание вполне однозначно: каждому  $t$  соответствует только одно определенное значение  $s$ , так как  $s$  является монотонно возрастающей (положительной) функцией  $t$ . Векторная функция  $\vec{r}(s)$  позволяет определить в каждой точке траектории так называемые естественные координаты, орты которых образуют естественный трехгранник. Построим эти орты. Касательный вектор

$\vec{n}_\tau(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$  в данной точке траектории, очевидно, является единичным

вектором, так как  $|d\vec{r}| = ds + O(ds^2)$ , где  $ds$  - элемент дуги,  $d\vec{r}$  - приращение радиус-вектора, т. е. стягивающая  $ds$  хорда. Поэтому имеем

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad (23.1)$$

$$\vec{n}_\tau^2 = 1, \quad |\vec{n}_\tau| = 1. \quad (24.1)$$

Дифференцируя (24.1) по  $s$ , получим

$$2\left(\vec{n}_\tau \frac{d\vec{n}_\tau}{ds}\right) = 0, \quad (25.1)$$

откуда следует, что вектор  $\frac{d\vec{n}_\tau}{ds}$  ортогонален вектору  $\vec{n}_\tau$  (см. рис. 4.1). Но

$$\frac{d\vec{n}_\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{n}_\tau(s + \Delta s) - \vec{n}_\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{n}_\tau}{\Delta s}. \text{ Из рисунка видно, что}$$

$$\left|\frac{d\vec{n}_\tau}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left|\frac{\Delta \vec{n}_\tau}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

так как  $\vec{n}_\tau$  - единичный вектор. Представим вектор  $\frac{d\vec{n}_\tau}{ds}$  в виде

$$\frac{d\vec{n}_\tau}{ds} = \left|\frac{d\vec{n}_\tau}{ds}\right| \vec{n} = k_1(s) \vec{n}, \quad (26.1)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор, направление которого совпадает с вектором  $d\vec{n}_\tau$ , а функция  $k_1(s) = d\alpha/ds$  называется кривизной кривой в данной точке. Вектор  $\vec{n}(s)$  называется вектором главной нормали, а угол  $\Delta\alpha$ , равный углу между двумя соседними касательными к траектории, называется углом смежности. Кривизна характеризует меру отклонения кривой от прямой в данной точке. Через векторы  $\vec{n}_\tau$  и  $\vec{n}$  проведем плоскость, которую назовем соприкасающейся плоскостью. В этой плоскости в направлении вектора  $\vec{n}$  отложим отрезок длины  $R(s) = 1/k_1(s)$  (рис. 4.1). Если теперь в соприкасающейся плоскости построить окружность радиуса  $R(s)$  с центром в точке  $C$ , то она будет иметь касание второго порядка с траекторией<sup>3</sup> в точке

<sup>3</sup> Понятие касания просто дать на языке множеств: пусть  $M$  и  $m$  - два множества с общей точкой  $O$ . Множество  $M$  имеет в  $m$  касание порядка  $\nu \geq 1$ , если

$$\frac{\Delta(X)}{(XO)^\nu} \Big|_{X \rightarrow O} \rightarrow 0,$$

где  $\Delta(X)$  - расстояние точки  $X$  множества  $M$  от  $m$ :

(здесь рисунок)



*B*. Эту окружность называют кругом кривизны, а ее радиус - радиусом кривизны.

Третий единичный орт построим с помощью векторного произведения  $\vec{n}_\tau$  и  $\vec{n}$ :

$$\vec{n}_b = [\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}]. \quad (27.1)$$

Это вектор бинормали. Векторы  $\vec{n}_\tau, \vec{n}, \vec{n}_b$  очевидно, образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов, которыми определяются направления естественных (натуральных) координатных осей в том месте траектории, где в данный момент времени находится движущаяся точка (рис. 5.1). Проекции векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{n}_b$  на декартовы оси имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{n} &= R(x'', y'', z''), \\ \vec{n}_b &= R(y'z'' - z'y'')\vec{n}_x + R(z'x'' - x'z'')\vec{n}_y + R(x'y'' - y'x'')\vec{n}_z, \end{aligned}$$

где  $R = \left| \frac{d\vec{n}_\tau}{ds} \right|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$ . Штрихом мы обозначили производную по  $s$ .

Парами векторов определяются плоскости: соприкасающаяся ( $\vec{n}_\tau, \vec{n}$ ), нормальная ( $\vec{n}, \vec{n}_b$ ) и спрямляющая ( $\vec{n}_b, \vec{n}_\tau$ ). Эти плоскости образуют так называемый естественный трехгранник Френе.

Изучение изменения направления касательного вектора  $\vec{n}_\tau$  привело нас к понятию кривизны кривой. Новое понятие можно ввести, если рассмотреть изменение направления соприкасающейся плоскости или, что тоже самое, бинормали. Так мы приходим к понятию кручения кривой. Для этого найдем

$$\frac{d\vec{n}_b}{ds} = \frac{d}{ds} [\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}] = \left[ \vec{n}_\tau \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \right]. \quad (28.1)$$

С другой стороны, так как  $\vec{n}_b^2 = 1$ , то

$$\left( \vec{n}_b \frac{d\vec{n}_b}{ds} \right) = 0, \quad (29.1)$$

поэтому из (28.1), (29.1) заключаем, что  $\frac{d\vec{n}_b}{ds}$  ортогонален векторам  $\vec{n}_\tau$  и  $\vec{n}_b$ .

Следовательно,  $\frac{d\vec{n}_b}{ds}$  коллинеарен с  $\vec{n}$ :

$$\frac{d\vec{n}_b}{ds} = k_2(s)\vec{n}. \quad (30.1)$$

Здесь  $k_2(s) = -\frac{1}{T(s)}$  называют кручением кривой, а  $T(s)$  - радиусом кручения кривой

в некоторой точке кривой. Так как  $\vec{n}$  - единичный вектор, то

$$\left| \frac{1}{T(s)} \right| = \left| \frac{d\vec{n}_b}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta s}, \quad (31.1)$$

где  $\Delta \Psi$  - угол между двумя соседними бинормальями. Из (30.1) видно, что если  $k_2(s) = 0$  всюду, то бинормаль не меняет своего направления, а кривая является плоской. Иными словами, кручение является мерой отклонения кривой от плоской кривой. Нетрудно показать, что  $T$  является псевдоскаляром.

Найдем  $\frac{d\vec{n}}{ds}$ . Так как  $\vec{n} = [\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_b]$ , то

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \left[ \frac{d\vec{n}_b}{ds} \cdot \vec{n}_\tau \right] + \left[ \vec{n}_b \cdot \frac{d\vec{n}_\tau}{ds} \right] = \frac{\vec{n}_b}{T} - \frac{\vec{n}_\tau}{R}, \quad (32.1)$$

где мы учли (26.1) и (30.1), а также соотношения  $[\vec{n} \cdot \vec{n}_\tau] = -\vec{n}_b$ ,  $[\vec{n}_b \cdot \vec{n}] = -\vec{n}_\tau$ . Следовательно, единичные векторы естественных координатных осей изменяются вдоль траектории согласно формулам

$$\frac{d\vec{n}_\tau}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{n}_\tau}{R} + \frac{\vec{n}_b}{T}, \quad \frac{d\vec{n}_b}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T}. \quad (33.1)$$

Это формулы Френе.

Найдем теперь проекции скорости и ускорения на оси естественных координат:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{s} = \dot{s} \vec{n}_\tau, \quad (34.1)$$

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \dot{s} \vec{n}_\tau = \ddot{s} \vec{n}_\tau + \dot{s}^2 \frac{d\vec{n}_\tau}{ds} = \ddot{s} \vec{n}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{n}. \quad (35.1)$$

Мы видим, что проекция скорости на касательную к траектории равна <sup>4</sup>

$$v_\tau = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{n}_\tau) = \dot{s}.$$

Вектор ускорения имеет две проекции: проекцию на касательную, равную  $\ddot{s} = \dot{v}$ , и проекцию на главную нормаль  $v^2/R$ , где  $R$  - радиус кривизны в рассматриваемой точке. Заметим, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости: его проекция на бинормаль всегда равна нулю.

В заключение приведем без вывода формулу для кручения кривой. Ее нетрудно получить, умножая скалярно правую и левую части (30.1) на вектор  $\vec{n}$ . После несложных преобразований получим

$$k_2(s) = -R^2 (\vec{r}' \cdot [\vec{r}'' \cdot \vec{r}''']),$$

откуда видно, что  $k_2(s)$  является псевдоскалярной величиной, так как  $k_2(s)$  пропорциональна скалярному произведению полярного вектора  $\vec{r}'$  и аксиального (псевдовектора) вектора  $[\vec{r}'' \cdot \vec{r}''']$ .

### Упражнения

1. Показать, что если  $k_1(s) = 0$ , то кривая есть прямая.

Так как  $k_1(s) = 0$ , то  $\frac{d\vec{n}_\tau}{ds} = 0$  и  $\vec{n}_\tau = \vec{c}_0$ , причем  $\vec{c}_0$  - постоянный вектор. Значит,

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{c}_0$ ,  $\vec{r} = \vec{c}_0 s + \vec{c}_1$ , а это есть уравнение прямой.

2. Показать, что если  $k_2(s) = 0$ , то кривая является плоской.

Из условия  $k_2(s) = 0$  следует, что  $\frac{d\vec{n}_b}{ds} = 0$ ,  $\vec{n}_b = \vec{c}$ . Заметим, что  $|\vec{c}| = 1$ , а  $\frac{d\vec{n}_b}{ds}$

ортогонален  $\vec{n}_b$ . Так как  $\vec{n}_b$  ортогонален  $\vec{n}_\tau$ , то  $(\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_b) = 0$ , т. е.  $\left(\vec{c} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = 0$ .

Отсюда, интегрируя, получим  $(\vec{c} \cdot \vec{r}) = a$ . Последнее уравнение есть уравнение плоскости, в которой и должна лежать кривая.

---

<sup>4</sup> Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  мы обозначаем как  $(\vec{a}\vec{b})$  или просто  $\vec{a}\vec{b}$ , векторное произведение двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается  $[\vec{a}\vec{b}]$ .

## ЗАКОНЫ НЬЮТОНА В ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

### 2.1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Принцип инерции, открытый Галилеем, в дальнейшем сыграл большую роль в правильном понимании самого движения. Первый закон Ньютона по существу просто повторяет принцип инерции Галилея, и часто его называют законом инерции Галилея - Ньютона. Его можно сформулировать так: *“Тело, предоставленное самому себе, если, на него не действует никакая сила, сохраняет свое прямолинейное движение с постоянной скоростью, как двигалось до этого (т. е. до момента наблюдения), или, остается в покое, если, оно до этого покоилось”*.

Физическое содержание этого закона, очевидно, сводится к утверждению, что существует такая система отсчета, в которой тело, не подверженное действию сил, будет двигаться равномерно и прямолинейно. Мы хорошо знаем, что существуют неинерциальные системы отсчета, относительно которых тело, предоставленное самому себе, будет двигаться с ускорением, так что конструктивным содержанием закона инерции является утверждение существования инерциальных систем отсчета.

Второй закон Ньютона говорит об изменении импульса (или скорости) тела, испытывающего действие сил. Поэтому этот закон составляет основное физическое содержание динамики материальной точки в механике Ньютона. Его математическая формулировка имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.2)$$

т. е. скорость изменения со временем импульса точки (количества движения)  $\vec{p}$  равна действующей силе. Импульс точки  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ , но так как инерционная масса точки  $m$  предполагается не зависящей от скорости  $\vec{r}$  и равна постоянной, то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (2.2)$$

При формулировке второго закона Ньютона могут возникнуть известные трудности, связанные с тем, что мы не в состоянии до проведения измерений решить, подвержено ли рассматриваемое нами тело силовому воздействию. Ведь силы могут быть далекодействующими. Мы сталкиваемся с необходимостью найти такую систему отсчета,

относительно которой можно было бы измерять ускорения тел. Такая система отсчета, очевидно, должна двигаться без ускорения. Следуя первому закону, мы видим, что способ нахождения такой системы отсчета основан на предположении, что мы имеем какую-то независимую (от второго закона) возможность узнать, что на тело отсчета не действуют никакие силы. Нетрудно понять, однако, что такой возможности мы не имеем, так как критерий, по которому ускорения нет, если сила равна нулю, приводит к требованию существования какой-то системы отсчета, относительно которой следует измерять ускорения. И так далее.

Вместе с этим из опытных данных известно, что величина любой силы<sup>1</sup>, действующей между двумя телами, быстро уменьшается с увеличением расстояния между телами (силы гравитационного и электромагнитного взаимодействий  $\sim r^{-2}$ , сильного,  $\sim e^{-r/r_0}/r$ , где  $r_0 \sim 10^{-13}$  см = 1 ферми). Если бы такого убывания сил с расстоянием не было, то, скажем, задача о взаимодействии двух тел (безотносительно к остальным телам Вселенной) была бы лишена всякого смысла просто потому, что нельзя было бы изолировать эти два тела так, чтобы они не взаимодействовали бы со всеми остальными телами Вселенной. Мы же, находясь на Земле, испытываем притяжение главным образом к ее центру и в значительно меньшей степени к какой-нибудь далекой (от нас) части Вселенной.

Несколько слов о глобальных инерциальных системах отсчета (СО). Можно выделить, в соответствии с нашими рассуждениями, “иерархию” этих СО. Поставим вопрос о том, в какой степени известные системы отсчета являются инерциальными. Так, геоцентрическая система отсчета (с началом  $O$  в центре Земли и осями, направленными на определенные звезды) совершает эллиптическое движение вокруг Солнца с периодом обращения  $T = 1 \text{ год} = 3 \cdot 10^7 \text{ с}$ . Так как радиус орбиты  $R \cong 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ , то центростремительное ускорение движения Земли по орбите вокруг Солнца по порядку величины равно  $w_3 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cong 0,6 \text{ см/с}^2$ . Напомним, что ускорение тела у поверхности Земли  $g = 980 \text{ см/с}^2$ .

Ускорение гелиоцентрической системы отсчета (с началом в центре инерции Солнца и с осями, направленными на определенные звезды), движущейся вокруг центра нашей Галактики, нетрудно оценить, используя опытные данные:  $\omega \sim 10^{-15} \text{ с}^{-1}$ ,  $R \sim 3 \cdot 10^{22} \text{ см}$ , откуда  $w_c \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2$

В 1981 г. английский физик Берч сообщил, что, исходя из обработки данных на-

---

<sup>1</sup> Здесь мы имеем в виду силы, которые возникают в результате фундаментальных взаимодействий: ядерных (сильных), электромагнитных или гравитационных.

блюдения за крупномасштабными областями Вселенной (это области, размер которых по порядку величины совпадает с размером видимой части Вселенной), эти области участвуют во вращательном движении с частотой  $\omega \sim 3 \cdot 10^{-21} \text{ с}^{-1}$ . Поскольку  $R$  в этом случае  $\sim 10^{28} \text{ см}$ , то  $w \sim 10^{-12} \text{ см/с}^2$ .

Эти примеры наглядно демонстрируют сделанные выше замечания о силах взаимодействия. Кроме того, следует подчеркнуть, что ответ на вопрос: “нужно ли учитывать “неинерциальность” систем отсчета в уравнениях движения?” зависит от того, какая точность решения данной динамической задачи нас устраивает.

Третий закон Ньютона (о равенстве сил действия и противодействия) силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Формулировка четвертого закона Ньютона (закона всемирного тяготения) по существу дает нам ответ на вопрос, что такое сила как независимая физическая величина, входящая правую часть уравнения (2.2). Сила гравитационного взаимодействия (притяжения) двух материальных точек пропорциональна произведению их масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки.

На этом мы закончим краткое рассмотрение законов Ньютона классической механики, заметив, что подробное их обсуждение можно найти в курсах общей физики.

## 2.2. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Выше говорилось, что первый закон Ньютона фактически утверждает, что существуют инерциальные системы отсчета (ИСО). Второй закон Ньютона в форме (2.2) справедлив также в ИСО. Мы видели, что в ИСО все силы, действием которых объясняется движение галактик, звезд, атомов, электронов и т. д., обладают важным общим свойством: величина силы, действующей на тело, обязательно уменьшается по мере того, как это тело удаляется от соседних тел. Рассмотрение движения тел относительно неинерциальных систем отсчета показывает, что в них появляются кажущиеся силы, которые, не будучи обусловлены присутствием других тел вблизи данного тела, не обладают свойством убывания.

Уравнения движения механики, записанные относительно ИСО, имеют очень простой вид, но кроме этого интерес к ИСО вызван и более глубокими физическими причинами<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Прекрасное изложение темы ИСО можно найти в книгах: Вейнберг С. Гравитация и космология

Рассмотрим в некоторой системе отсчета  $S$  движение  $N$  гравитирующих свободных материальных точек и запишем для этой системы  $N$  векторных уравнений движения (второй закон Ньютона):

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = -G \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{m_\alpha m_\beta (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}, \quad (3.2)$$

где индексы  $\alpha, \beta$  пробегает значения  $1, 2, \dots, N$ , а гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Перейдем к описанию этой системы в новых пространственно-временных координатах  $\vec{r}'_\alpha$ , связанных со старыми координатами следующими формулами преобразования:

$$\vec{r}'_\alpha = (A)\vec{r}_\alpha + \vec{V}t' + \vec{d}, \quad (4.2)$$

$$t' = t + \tau. \quad (5.2)$$

Здесь  $(A)$  - произвольная действительная ортогональная матрица,  $\vec{V}, \vec{d}$  - постоянные действительные трехмерные векторы,  $\tau$  действительная постоянная. Поясним, как действует матрица  $(A)$  на любой из векторов  $\vec{r}_\alpha$ . Если  $x_i$  - декартовы компоненты вектора  $\vec{r}$  (индекс  $\alpha$  для краткости опускаем), то при преобразовании, задаваемом матрицей  $(A)$ , компоненты всех векторов преобразуются по закону

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j, \quad x_j = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z). \quad (6.2)$$

Здесь и далее латинскими индексами **отмечаются** компоненты трехмерных векторов, тензоров и т. д. Нетрудно видеть, что из условий ортогональности преобразования и сохранения квадрата длины вектора  $\vec{r}$  следует, что<sup>3</sup>

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (7.2)$$

где  $\delta_{jk}$  - символ Кронекера со значениями  $\delta_{jk} = 1, j = k, \quad \delta_{jk} = 0, j \neq k$  представляет фактически шесть соотношений. Следовательно, из девяти величин  $\alpha_{ij}$  лишь три будут независимыми. Поэтому матрица  $(A)$  определена тремя действительными постоянными величинами. Формулы (4.2), (5.2) можно рассматривать как формулы преобразования ради-

гия. М.: Мир, 1975, Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1985. Здесь мы во многом следуем этим работам.

<sup>3</sup> Пространства, в которых квадрат расстояния между точками, характеризуемыми радиус-векторами  $\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta$ , определяется формулой

$$|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^2 = \sum (x_{i\alpha} - x_{i\beta})^2 \equiv (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2$$

называют евклидовыми.

ус-векторов точек  $\vec{r}_\alpha$  и времени  $t$  при переходе от одной ИСО  $S$  к другой ИСО  $S'$ .

Если в **каждой** ИСО имеются наблюдатели (скажем, в началах СО  $O$  и  $O'$ ), то наблюдатель, находящийся в ИСО  $S$ , видит ИСО  $S'$ , декартовы оси которой повернуты с помощью матрицы  $(A)$ , движущейся со скоростью  $\vec{V}$  и смещенной при  $t = 0$  на вектор  $\vec{d}$ , часы наблюдателя в  $S'$  отстают от часов наблюдателя в  $S$  на величину  $\tau$ . Преобразования (4.2), (5.2) являются фактически группой преобразований, так как параметры, определяющие их, могут принимать произвольные значения. Эту 10-параметрическую группу (три угловых параметра, характеризующие матрицу поворотов  $(A)$ , по три компоненты векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{d}$  и параметр  $\tau$ ) называют группой (движений) Галилея. Поставим вопрос, какой вид примут уравнения (3.2) в ИСО  $S'$ ? Подставив (4.2), (5.2) в (3.2), получим

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha' = -G \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{m_\alpha m_\beta (\vec{r}_\alpha' - \vec{r}_\beta')}{|\vec{r}_\alpha' - \vec{r}_\beta'|^3}, \quad (8.2)$$

т. е. уравнения движения (3.2) сохраняют свою форму при преобразованиях группы Галилея. Форм-инвариантность уравнений движения (т. е. сохранение функциональной зависимости преобразованных уравнений от координат) относительно таких преобразований называют галилеевской инвариантностью, или *принципом относительности Галилея*, Уравнения Ньютона (3.2) инвариантны относительно преобразований группы Галилея.

Развитие механики Ньютона способствовало развитию наших представлений о пространстве и времени. Действительно, евклидовость пространства (т. е. то, что в пространстве действуют правила евклидовой геометрии пространства), заложенная в механику Ньютона а priori, могла быть проверена путем сравнения предсказаний механики с результатами экспериментов. Так было доказано, что с большой точностью пространство является евклидовым. Для лучшего уяснения связи механики Ньютона с евклидовостью пространства рассмотрим преобразования группы Галилея при некоторых фиксированных значениях параметров.

1. Пусть все параметры, кроме  $\vec{d}$ , равны нулю, т. е. мы совершаем только преобразование координат вида

$$\vec{r}_\alpha' = \vec{r}_\alpha + \vec{d}, \quad t' = t.$$

Очевидно, это преобразование можно осуществить, или смещая начало системы  $S$  на



вектор  $\vec{d}$  (преобразование системы отсчета), или перенося каждую материальную точку нашей механической системы в точки пространства, отстоящие от прежних на постоянный вектор  $\vec{d}$ . Согласно (3.2) и (8.2) механические процессы при этом будут протекать одинаковым образом. Это означает, что в пространстве нет выделенных точек, а значит оно однородно.

2. Пусть  $\vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha, t' = t + \tau$ . Форм-инвариантность уравнений (3.2) относительно этого преобразования (переносе начала отсчета всех часов) означает, что все моменты времени равноправны (если изображать эти моменты на оси времени), т. е. и тот же механический процесс при одинаковых начальных условиях будет протекать одинаково независимо от начального момента  $t_0$ .

3. Пусть  $\vec{r}'_\alpha = (A)\vec{r}_\alpha, t' = t$ . Нетрудно понять, что инвариантность уравнений Ньютона относительно этих преобразований доказывает отсутствие выделенных направлений в пространстве, т. е. его изотропность.

Итак, на основании механических уравнений можно дать некоторые заключения о свойствах пространства и времени: однородности и изотропности пространства, однородности времени.

4. Пусть  $\vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{V}t, t' = t$ . Если смотреть на эти преобразования как на точечные, то согласно данному выше определению эти преобразования характеризуют переход из одной ИСО к другой ИСО. Нелишне подчеркнуть, что в уравнения (8.2) не входит вектор  $\vec{V}$ , который согласно (4.2) является вектором скорости системы  $S$  относительно  $S'$ . Это означает, что, во-первых, механические процессы в разных ИСО протекают одинаково, и, наблюдая механические процессы, мы не сможем сказать, находимся мы в неподвижной или в движущейся с постоянной скоростью  $\vec{V}$  системе отсчета. Из этих преобразований также следует, что расстояния между любыми точками являются инвариантными для всех ИСО, т. е.

$$(\vec{r}'_\alpha - \vec{r}'_\beta)^2 = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)^2,$$

т. е. пространство евклидово во всех ИСО.

*Пример.* Кинематическая “задача преследования” в движущейся системе отсчета.

В плоскости  $xOy$  движутся две точки с постоянными по модулю скоростями, причем  $\vec{V}_1 = (v, 0)$ , а вектор  $\vec{V}_2$  все время направлен на точку 1. Найти траекторию точки 2 в системе осей  $xO'y$ , движущихся вместе с точкой 1 рис. (1.2), и интервал времени  $T$ , через

который произойдет встреча, считая, что  $|\vec{V}_2| = 2v$  и что при  $t = t_0 = 0$ ,  $\vec{r}_1(0) = (0, H)$ ,  $\vec{r}_2(0) = (0, 0)$ . В (движущейся) системе отсчета  $xO'y$  введем полярные координаты точки 2  $r, \varphi$  согласно  $X = r \cos \varphi$ ,  $Y = r \sin \varphi$ . Кинематическое условие

$$\dot{X} = -v_2 \cos \varphi - v_1, \quad \dot{Y} = -v_2 \sin \varphi.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{Y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi}{\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi} = -\frac{v_1}{v_2 \sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Переходя в этом равенстве к дифференцированию по  $\varphi$ , получим

$$\frac{v_1}{v_2} \frac{dr}{d\varphi} = r \left( \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{v_1 \cos \varphi}{v_2 \sin \varphi} \right).$$

Разделяя переменные

$$\frac{v_1}{v_2} \frac{dr}{r} = \left( \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{v_1 \cos \varphi}{v_2 \sin \varphi} \right) d\varphi$$

и интегрируя, получаем

$$\frac{v_1}{v_2} (\ln r + C) = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{v_1}{v_2} \ln \sin \varphi.$$

Определив константу  $C$  из условия, что при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $r = H$ , находим уравнение траектории в полярных координатах в системе  $xO'y$

$$(r/H)_{v_2}^{v_1} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} / (\sin \varphi)_{v_2}^{v_1}.$$

Если  $|v_2| = 2v$ ,  $|v_1| = v$ , то

$$r = H \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

Для нахождения интервала времени  $T$  воспользуемся равенством

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi = (5 - 4 \cos \varphi) v^2$$

и учтем, что

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{2}{\sin \varphi} (2 - \cos \varphi) \dot{\varphi}.$$

Из последних двух соотношений получим

$$\frac{H}{(1 + \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = \pm v,$$

$$\int_{\pi/2}^0 \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = -\frac{v}{H}(t - t_0).$$

Интеграл слева с помощью замены переменной  $x = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$  приводится к виду

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1) dx.$$

Учитывая, что  $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$ , а  $\varphi(T) = 0$  найдем

$$\Delta t = \frac{2H}{3v}.$$

### 2.3. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ (ОСНОВНАЯ) ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Второй закон Ньютона (2.2), или, что то же самое, векторное уравнение движения, представляет собой три дифференциальных уравнения второго порядка по времени. Например, проектируя обе части (2.2) на оси декартовой системы координат, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Различают две задачи динамики: 1) по заданному закону движения точки, т. е. по известному как функция  $t$  векторному соотношению  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  находят силу  $\vec{F}$ , действующую на точку; это прямая задача динамики

2) по заданной силе  $\vec{F}$  находят закон движения точки  $\vec{r}(t)$ ; это обратная (основная) задача динамики. Поговорим об основной задаче динамики более подробно. Для ее решения недостаточно знать только силу. Следует задать также механическое состояние в некоторый момент времени  $t_0$ , т. е. начальные условия  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$ . Механическое состояние точки в момент  $t$ , т. е.  $\vec{r}(t)$ , и  $\dot{\vec{r}}(t)$  однозначно определяется ее начальным механическим состоянием и условиями ее движения (уравнениями движения). Это следует из однозначности и единственности решения дифференциальных уравнений (2.2), удовлетворяющих данным начальным ус-

ловиям. Сформулированное предложение о предсказуемости эволюции механической системы во времени при заданных начальном состоянии и условиях движения называется принципом механической причинности, или принципом механического детерминизма. Его суть наиболее точно и полно выразил Лаплас: “Разумное существо, которое в каждый момент знало бы все движущие силы природы и имело бы полную картину состояния, в котором природа находится, могло бы (если бы только его ум был в состоянии проанализировать эти данные) выразить одним уравнением как движение мельчайших атомов, так и движение самых больших тел мира. Ничто не осталось бы для него неизвестным, и оно могло бы обозреть одним взглядом как будущее, так и прошлое”, т. е. по начальным состояниям и взаимодействиям состояние системы в любой момент времени в будущем определялось бы однозначно. Со времен Лапласа появились новые важные идеи. Вот одна из них.

Хотя уравнения, описывающие эволюцию механической системы во времени, вполне детерминированы, ее развитие во времени может различаться своими маршрутами. Это связано с чувствительностью некоторых систем к начальным условиям, а точнее, к даже малому изменению начального состояния. В классической динамике в качестве примера можно привести шарик, падающий на острие лезвия бритвы, траектория которого после соприкосновения существенно зависит от положения шарика относительно острия в момент времени  $t$  перед тем, как он касается лезвия.

Решение уравнения (2.2), которое удовлетворяет какому-либо конкретному начальному условию, называют частным решением. Более важно найти решение, удовлетворяющее произвольным условиям, это так называемое общее решение.

#### 2.4. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

В теории дифференциальных уравнений есть понятие первых интегралов. Первыми интегралами уравнений движения (9.2) будем называть такие функции  $f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$  координат, скоростей и времени, которые обращаются в постоянные  $C_i$  в силу этой системы дифференциальных уравнений

$$f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = C_i. \quad (10.2)$$

Это означает, что система (9.2) может быть сведена к эквивалентной

$$\frac{df_i}{dt} = 0. \quad (11.2)$$

Условие функциональной независимости трех первых интегралов (рассматриваемых как функции скоростей) записывается в виде неравенства нулю (функционального)

определителя Якоби

$$\begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial \dot{x} & \partial f_2 / \partial \dot{x} & \partial f_3 / \partial \dot{x} \\ \partial f_1 / \partial \dot{y} & \partial f_2 / \partial \dot{y} & \partial f_3 / \partial \dot{y} \\ \partial f_1 / \partial \dot{z} & \partial f_2 / \partial \dot{z} & \partial f_3 / \partial \dot{z} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12.2)$$

Если (12.2) выполнено, то три первых интеграла движения будут независимыми в смысле разрешимости системы конечных уравнений (10.2) относительно  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ . Условие (12.2) является необходимым и достаточным условием независимости первых интегралов движения. Далее, система (10.2) представляет собой систему дифференциальных уравнений 1-го порядка. Предположим, что мы свели ее к эквивалентной системе уравнений

$$\frac{d}{dt} \Phi_i(x, y, z, C_1, C_2, C_3, t) = 0, \quad (13.2)$$

т. е. мы нашли  $\Phi_i$  такие, что

$$\Phi_i(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3) = \tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14.2)$$

$\Phi_i$  называют вторыми интегралами движения. Они являются независимыми, если уравнения (14.2) разрешимы относительно координат  $x, y, z$ . Условие независимости - неравенство нулю функционального определителя

$$\det \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \partial \Phi_1 / \partial x & \partial \Phi_2 / \partial x & \partial \Phi_3 / \partial x \\ \partial \Phi_1 / \partial y & \partial \Phi_2 / \partial y & \partial \Phi_3 / \partial y \\ \partial \Phi_1 / \partial z & \partial \Phi_2 / \partial z & \partial \Phi_3 / \partial z \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15.2)$$

Решение системы (14.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_1, \tilde{C}_3, \tilde{C}_2), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3). \end{aligned} \quad (16.2)$$

Найденные таким образом функции (16.2), являющиеся решением системы уравнений (9.2) и содержащие шесть произвольных постоянных интегрирования, называют общим решением, так как, придавая определенные значения постоянным  $C_i, \tilde{C}_i$  можно получить функции (10.2) при любых начальных условиях. Выражение постоянных  $C_i, \tilde{C}_i$  через начальные значения  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  проводится элементарно в два приема.

1. Из системы (10.2) при  $t = t_0$  имеем

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = C_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.2)$$

2. Подставляя в систему (14.2), взятую при  $t = t_0$ ,  $C_i$  из (17.2), находим

$$\tilde{C}_i = \Phi_i(x_0, y_0, z_0, t_0, C_1(t_0), C_2(t_0), C_3(t_0)), \quad i=1, 2, 3. \quad (18.2)$$

Найти общее решение уравнений движения - это значит полностью решить обратную задачу динамики.

Пример. Найти общее решение векторного уравнения движения (1.2), если сила зависит только от времени  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ .

Интегрируя (1.2) один раз, получаем три первых независимых интеграла движения

$$\dot{\vec{r}} - \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt' = \vec{C},$$

где постоянный вектор  $\vec{C}$  - это начальная скорость  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$ . Интегрируя последнее уравнение, получаем три независимых вторых интеграла движения  $t'$

$$\vec{r} - \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{F}(t'') - \vec{C}(t - t_0) = \tilde{\vec{C}}.$$

Здесь  $\tilde{\vec{C}} = \vec{r}_0$ . Общее решение имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{F}(t'').$$

Пример. Пусть проекции силы в уравнениях (9.2) зависят только от соответствующих координат. Найти все первые интегралы движения в этом случае и общее решение (в квадратурах).

Введем обозначения  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Тогда (9.2) можно переписать в виде  $m\ddot{x}_i = F_i(x_i)$ . Последние уравнения, очевидно, имеют три первых интеграла

$$f_i \equiv \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - \int_{x_{i0}}^{x_i} F_i(x'_i) dx'_i = C_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Откуда находим

$$\frac{dx_i}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (C_i + \int_{x_{i0}}^{x_i} F_i(x'_i) dx'_i)} \equiv \pm B(x_i).$$

Знак перед корнем нужно выбирать в соответствии с начальным состоянием. Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$t = t_0 \pm \int_{x_{i0}}^{x_i} \frac{dx'_i}{B(x'_i)}.$$

## 2.5. ИМПУЛЬС, МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.

## МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ СОХРАНЕНИЯ

Уравнения движения (1.2), (2.2) определяют закон изменения импульса материальной точки, из которых следует, что если  $\vec{F} = 0$ , то вектор импульса точки  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = \vec{p}(t_0)$  где  $\vec{p}(t_0)$  - постоянный вектор. Это утверждение носит характер теоремы. Так как  $\vec{p}$  - трехмерный вектор, то в случае равенства нулю всех трех компонент силы остаются неизменными во время движения все три проекции импульса на неподвижные оси. Однако из (1.2) следует также, что в случае равенства нулю какой-либо проекции силы на неподвижную ось соответствующая проекция импульса сохраняется. Функции

$$f_i = mx_i = p_i(t_0), \quad (x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z) \quad (19.2)$$

являются тремя первыми независимыми интегралами движения. Найдем векторное произведение  $[\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}]$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки. Из (1.2) получим

$$[\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}],$$

или

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}, \quad (21.2)$$

где  $L = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$  - момент импульса точки, а  $\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$  - момент силы. Уравнение (21.2) определяет закон изменения момента импульса точки со временем. Из (21.2) следует теорема:

*Если вектор момента силы в любой момент времени равен нулю  $\vec{M} = 0$ , то момент импульса точки не изменяется во время движения, т. е.  $\vec{L} = \vec{L}_0$ , или по компонентам  $L_x = L_{x0}$ ,  $L_y = L_{y0}$ ,  $L_z = L_{z0}$ .*

В случае равенства нулю какой-либо проекции момента силы соответствующая проекция момента импульса будет оставаться постоянной. Компоненты вектора  $\vec{L}$  по декартовым осям

$$\vec{L} = \vec{n}_x m(y\dot{z} - z\dot{y}) + \vec{n}_y m(z\dot{x} - x\dot{z}) + \vec{n}_z m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \vec{n}_x L_x + \vec{n}_y L_y + \vec{n}_z L_z. \quad (22.2)$$

Из (6.1) и (22.2) видно, что  $\vec{L} = 2m\vec{\sigma}$ , где  $\vec{\sigma}$  - секторная скорость точки. Поставим общий вопрос: в каких случаях  $\vec{M} = 0$ , т. е. когда  $\vec{L}$  является интегралом движения? Оказывается, это будет в двух случаях: 1)  $\vec{F} = 0$ ; 2)  $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ . Первый случай тривиален, так как на точку не действуют силы. Во втором случае линия действия параллельна (или антипараллельна) радиус-вектору частицы и проходит через некоторую неподвижную

точку-центр силы. Очевидно, центр силы находится в начале координат. Тогда

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] = \frac{f}{r} [\vec{r} \cdot \vec{r}] = 0. \text{ Силы вида } \vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \text{ называются центральными.}$$

Таким образом, момент импульса точки относительно центра силы сохраняется. Однако между тремя проекциями момента импульса имеется зависимость, так как

$$(\vec{L} \cdot \dot{\vec{r}}) = (m[\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}] \cdot \dot{\vec{r}}) = 0, \quad (23.2)$$

$$\dot{x}L_x + \dot{y}L_y + \dot{z}L_z = 0. \quad (24.2)$$

Аналогично

$$(\vec{L} \cdot \vec{r}) = (m[\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}] \cdot \vec{r}) = 0, \quad (25.2)$$

$$xL_x + yL_y + zL_z = 0.$$

Но если  $\vec{F} = f \frac{\vec{r}}{r}$ , то  $\vec{L} = \vec{L}_0$ , и, следовательно

$$(\vec{L}_0 \cdot \dot{\vec{r}}) = 0, \quad (\vec{L}_0 \cdot \vec{r}) = 0. \quad (26.2)$$

Из (26.2) видим, что под действием центральной силы точка движется по плоской траектории, плоскость которой проходит через центр силы и перпендикулярна постоянному моменту импульса точки  $\vec{L}_0$ .

Заметим, что существование зависимостей (24.2), (25.2) связано с невозможностью решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} L_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ L_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ L_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (27.2)$$

как относительно  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  (при фиксированных  $x, y, z$ ), так и относительно  $x, y, z$  (при фиксированных  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ). Легко проверить, что функциональный определитель этой системы равен нулю.

Вычислим скалярное произведение векторов  $\dot{\vec{r}}$  и  $m\ddot{\vec{r}}$ , умножая (2.2) скалярно на вектор  $\dot{\vec{r}}$ :

$$m(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}). \quad (28.2)$$

Левая часть (28.2) равна полной производной по  $t$  от кинетической энергии точки

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}. \quad (29.2)$$

Правая часть (28.2) равна мощности силы. Рассмотрим случай потенциальной силы. Силу называют потенциальной, если она зависит только от координат и времени и удовлетворяет векторному уравнению



$$\text{rot } \vec{F} = [\vec{\nabla} \cdot \vec{F}] = 0. \quad (30.2)$$

Если (30.2) выполняется, то  $\vec{F}$  можно представить в виде

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad (31.2)$$

скалярную функцию  $U$  называют потенциальной энергией точки. Пусть  $\vec{F}$  и  $U$  не зависят от  $t$  явно. Используя (31.2), представим  $(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})$  в виде

$$(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -\frac{\partial U}{\partial t}. \quad (32.2)$$

Выражая  $m(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}})$  из (29.2) и подставляя полученное, а также (32.2) в (28.2), находим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} = \frac{dA}{dt}. \quad (33.2)$$

Здесь  $dA$  - элементарная работа потенциальной силы, т. е.  $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$ . Так как  $dT$  и  $dA$  являются в данном случае полными дифференциалами, то

$$d(T + U) \equiv dE = 0, \quad (34.2),$$

т. е.

$$T + U|_{t_0} = T + U|_t, \quad E(t_0) = E(t). \quad (35.2)$$

Мы получили закон сохранения полной механической энергии точки, которая определяется как сумма ее кинетической и потенциальной энергии. Если  $\vec{F}$  и  $U$  зависят явно от  $t$ , то

$$\frac{dU}{dt} = (\vec{\nabla}U \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \frac{\partial U}{\partial t} = -(\vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (36.2)$$

Выражая отсюда  $(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})$  и подставляя в (28.2), получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (37.2)$$

Это закон изменения полной механической энергии точки, движущейся в поле потенциальной силы.

В задачах механики помимо потенциальных сил рассматривают также диссипативные и гироскопические силы. Диссипативная сила  $\vec{F}^d$  направлена всегда противоположно скорости тела относительно среды, вызывающей торможение тела:

$$\vec{F}^d = -\beta \dot{\vec{r}}, \quad (38.2)$$

причём  $\beta$  в общем случае является положительной скалярной функцией координат и скорости точки. Гироскопическая сила представима в виде

$$\vec{F}^g = \alpha [\dot{\vec{r}} \cdot \vec{B}], \quad (39.2)$$

где  $\dot{\vec{r}}$  - скорость точки. Из (39.2) следует, что вектор  $\vec{F}^g$  ортогонален вектору скорости  $\dot{\vec{r}}$ , т. е.  $(\vec{F}^g \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$ . Если  $\vec{F}^d \neq 0$  и  $\vec{F}^g \neq 0$ , то эти силы нужно учитывать в уравнениях движения. В частности, закон изменения полной энергии точки при наличии потенциальных, гироскопических и диссипативных сил имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + (\vec{F}^d \cdot \dot{\vec{r}}). \quad (40.2)$$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

### 3.1. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Далее мы увидим, что в механике рассматриваются некоторые модельные системы, движение которых можно описать одним уравнением

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Здесь  $x$  не обязательно декартова координата точки, а параметр  $m$  не всегда обозначает массу точки. Примерами таких систем могут быть: гармонический осциллятор, математический маятник, бусинка на неподвижном гладком кольце и т. п.

Если  $U$  является только функцией координаты  $x$ , то уравнение движения интегрируется в общем виде, т. е. основная задача динамики решается при произвольной функции  $U$ . Для этого найдем первый интеграл уравнения движения (1.3). Умножим (1.3) на  $\dot{x}$ , получим

$$\dot{x}m\ddot{x} = -\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)\right) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + U(x_0) = E_0. \quad (3.3)$$

Уравнение (2.3) выражает закон сохранения полной энергии (3.3). Из (3.3) можно найти  $\dot{x}(x)$ , не отыскивая закона движения точки  $x(t)$ . Кроме того, (3.3) есть дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно проинтегрировать в общем виде методом разделения переменных. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}, \quad (4.3)$$

откуда

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} + C. \quad (5.3)$$

Решение (5.3), зависящее от двух постоянных  $E_0, C$  является вторым интегралом движения.

### 3.2. ОБЛАСТИ ДВИЖЕНИЯ. ТОЧКИ ОСТАНОВКИ

Запишем (3.3) в виде

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E_0 - U(x). \quad (6.3)$$

Так как  $\frac{m\dot{x}^2}{2} = T > 0$ , то отсюда следует, что движение происходит только в тех областях пространства, где  $E_0 > U(x)$ . Если  $U(x)$  задана графически, то классически допустимые области движения (для определенной  $E_0$ ) можно найти, проведя на графике  $U(x)$  горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению  $E_0$  (рис. 1.3). Действительные корни уравнения  $U(x) - E_0 = 0$  определяют границы областей движения. В этих точках потенциальная энергия равна полной, а кинетическая энергия (и скорость точки) обращается в нуль. Поэтому эти точки являются точками остановки частицы; они зависят от  $E_0$ . Если полная энергия частицы равна  $E_0$ , как на рис. 1.3, то в зависимости от начального значения  $x_0$  движение может либо происходить в ограниченной области пространства (если  $x_1 < x_0 < x_2$ ) между точками  $x_1, x_2$ , либо в области пространства, ограниченной лишь с одной стороны (если  $x_1 < x_{-1}$  или  $x_0 > x_3$ ). Движение в ограниченной области пространства называют финитным; в ограниченной с одной стороны или неограниченной вообще (движение с  $\tilde{E}_0$ ) - инфинитным. При инфинитном движении частица уходит на бесконечность. Частица с энергией  $E_0$  в заштрихованных областях находиться не может, как и не может пройти через эти области. Последнее утверждение справедливо только в классической механике. Если система квантовомеханическая, то вероятность просачивания частицы через классически недоступную область (т. е. через потенциальный барьер) отлична от нуля. Поэтому даже если мы приготовили состояние  $x_1 < x_0 < x_2$  с энергией  $E_0$ , то вероятность обнаружения частицы в области  $x_0 > x_3$  можно оценить по формуле

$$w \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{2m(U(x)-E_0)} dx},$$

а в области  $x < x_{-1}$

$$w \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{2m(U(x)-E_0)} dx},$$

где  $\hbar$  - постоянная Планка.

В квантовой физике явление прохождения частицы через потенциальный барьер называют квантовым туннелированием или туннельным эффектом. Он будет иметь место

при конечных высоте и ширине барьера. Заметим, что формальный переход к классической теории соответствует пределу  $\hbar \rightarrow 0$ , что влечёт за собой  $w \rightarrow 0$ .

Если  $x$  лежит в области  $x_1 < x < x_2$ , т. е. частица находится потенциальной яме, то движение является колебательным. Из (1.3) и вообще из уравнений движения следует, что если силы, действующие на частицу, являются потенциальными и  $U$  зависит от  $t$  явно, то замена в уравнениях движения  $t$  на  $-t$  не меняет уравнений движения. Это - свойство обратимости движений, происходящих по законам классической механики<sup>1</sup>. В частности, это означает, что время движения  $t_{x_1x_2}$  от  $x_1$  до  $x_2$  равно времени обратного движения  $t_{x_2x_1}$  от  $x_2$  до  $x_1$ , т. е.  $t_{x_2x_1} = t_{x_1x_2}$ . Но период полного колебания  $T$  равен

$$T = t_{x_1x_2} + t_{x_2x_1} = 2t_{x_1x_2} \quad (7.3)$$

и, согласно (5.3), получим

$$T(E_0) = 2 \int_{x_1(E_0)}^{x_2(E_0)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}}. \quad (8.3)$$

Этой формулой определяется период колебаний частицы в зависимости от ее полной механической энергии.

Пример. Найти закон движения и период колебаний одномерного гармонического осциллятора. Гармоническим осциллятором называют механическую систему с потенциальной энергией  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ ,  $x$  - координата точки. Классически доступная область движения есть при любой положительной полной энергии (рис. 2.3). Заметим, если  $E_0 = 0$ , то решение тривиально:  $x(t) = 0$ . Вместе с  $x$  обращаются в нуль все производные по времени от закона движения:  $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\ddot{x}(t) = 0$ ,  $\dddot{x}(t) = 0, \dots$ . При  $E_0 > 0$  закон движения получим, используя (5.3):

---

<sup>1</sup> Свойство обратимости при замене  $t$  на  $-t$  имеет место и в общем случае движения в трехмерном пространстве. Эту так называемую  $t$ -инвариантность уравнений механики можно продемонстрировать, сняв на киноплёнку какой-то механический процесс, развивающийся в направлении возрастания  $t$ , и прокручивая ее в обратном направлении.

$$t = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = t_0 \pm \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} = t_0 \pm \frac{1}{\omega} (\arcsin \frac{x}{\beta} - \alpha),$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{x_0}{\beta}.$$

Обращая полученную формулу, найдем

$$x = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} \sin(\omega(t - t_0) + \alpha).$$

Отсюда видно, что точка совершает гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega$ .

Период колебаний  $T$  можно найти непосредственно из (8.3), не отыскивая закон движения. Точки остановки в случае гармонического осциллятора  $x_{1,2} = \pm\beta$ , поэтому

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} = \frac{4}{\omega} \arcsin 1 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

### 3.3. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ТОЧЕК ОСТАНОВКИ

Рассмотрим движение частицы, энергия которой равна  $E_0$ , вблизи точки  $x_1$  (рис. 3.3), т. е. считаем что  $x_0 - x_1 \ll x_1$  и  $x - x_1 \ll x_1$ . Разложим  $U(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_1$ , ограничиваясь членом первого порядка малости по разности  $x - x_1$

$$U(x) = U(x_1) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_1} (x - x_1) = U(x_1) - F(x - x_1). \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в формулу (6.3), получим

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2F}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x - x_0}} = \pm \sqrt{\frac{2m}{F}} (\sqrt{x - x_1} - \sqrt{x_0 - x_1}). \quad (10.3)$$

Обращая (10.3), найдем

$$\sqrt{x - x_1} - \sqrt{x_0 - x_1} = \pm \sqrt{\frac{F}{2m}} (t - t_0) \quad (11.3)$$

Очевидно, знак  $+$  в правой части (11.3) нужно поставить, если  $\dot{x}_0 > 0$ , а знак  $-$ , если  $\dot{x}_0 < 0$ . Пусть  $x_0 = x_1$ , т. е. частица в начальный момент времени  $t_0$  находится в точке остановки. Тогда закон движения вблизи  $x_1$  имеет вид

$$x(t) - x_0 = \frac{F}{2m} (t - t_0)^2, \quad (12.3)$$

т. е. частица движется с постоянным ускорением, что и должно быть, так как движение происходит под действием постоянной силы. Напомним, что формула (12.3) - приближенная; ее точность убывает при удалении от  $x_1$ . Сравним отрезки времени, которые затрачивает частица на прохождение малого отрезка пути  $s$  вблизи и вдали от точки остановки  $x_1$ . Из (12.3) следует, что если отрезок пути  $s$  примыкает к точке остановки, то для его прохождения необходимо затратить отрезок времени  $\Delta t \sim \sqrt{2ms/F}$ , т. е.  $\Delta t \sim s^{1/2}$ . Малый отрезок пути  $s$  вдали от точки остановки частица проходит за время  $\Delta t \sim s$ , так как в этом случае можно считать силу  $F$  равной нулю, а движение равномерным. Таким образом, вблизи точки остановки частица затрачивает большее время на прохождение малого отрезка пути  $s$ , чем вдали от нее. Это вполне естественно, так как скорость частицы вблизи точки остановки стремится к нулю.

Рассмотрим теперь движение частицы с энергией  $E_0$  в окрестности точки  $x_1$  (рис. 4.3), т. е. вблизи максимума потенциального барьера.

Рис. 4.3

Как и ранее, раскладываем  $U(x)$  в окрестности  $x_1$ . Теперь, однако,

$$U(x) = E_0 + \frac{U''(x_1)}{2}(x - x_1)^2, \quad (13.3)$$

т. к.  $U'|_{x=x_1} = 0$ . Поскольку в точке  $x_1$   $U(x)$  имеет максимум, то  $U''(x_1) < 0$ . Из (5.3) с учетом (13.3) получим

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{-\frac{U''(x_1)(x - x_1)^2}{2}}} = \pm \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x - x_1} = \pm \frac{1}{\alpha} \ln \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad (14.3)$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{-U''(x_1)}{m}} > 0$ .

Из (14.3) находим закон движения частицы в виде

$$x(t) - x_1 = (x_0 - x_1)e^{\pm\alpha(t-t_0)}. \quad (15.3)$$

Знак в показателе экспоненты определяется направлением скорости частицы в начальный момент времени  $t_0$  в точке  $x_0$  так как

$$\dot{x}(t_0) = \pm\alpha(x_0 - x_1). \quad (16.3)$$

Поэтому закон движения частицы в окрестности точки  $x_1$  при приближении к ней

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (17.3)$$

при удалении от  $x_1$

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{\alpha(t-t_0)}. \quad (18.3)$$

Мы видим, что для прохождения участка пути до точки остановки  $x_1$ , находящейся в точке максимума потенциального барьера, частице необходимо бесконечно большой отрезок времени, т. е. частица может приблизиться к  $x_1$  лишь асимптотически.

Некоторые интересные замечания о решениях можно сделать, опираясь на полученные выше результаты, о характере движения частицы в окрестности точек остановок, в которых потенциальная энергия частицы имеет максимум. Будем считать, что максимумы потенциальной энергии во всех точках остановок одинаковы. Это так называемый вырожденный случай. Рассмотрим движение частицы в полях  $U(x)$ , графики которых изображены на рис. 5.3, а, б. Для дальнейшего удобно полагать  $t_0 = -\infty$ , т. е. считать, что начальный момент времени бесконечно удален в прошлое. Рассмотрим движение частицы в поле  $U(x)$ , изображенном на рис. 5.3.а, полагая  $x(-\infty) = x_1$ ,  $\dot{x}(-\infty) = 0$ . Из уравнения движения  $m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$  и первого интеграла (полной энергии)

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E(-\infty). \quad (19.3)$$

С учетом начальных условий следует, что  $E(-\infty) = 0$ , так как  $\dot{x}(-\infty) = 0$  и  $U(x_1) = 0$ . Зададимся вопросом: каков вид решений уравнения движения, удовлетворяющего условиям  $x(-\infty) = x(\infty) = x_1$ ? Возможно ли нетривиальное движение, удовлетворяющее этим начальным условиям? Очевидно, нет. Действительно. Если частица сдвинется (случайно) из точки  $x = x_1$  в любом направлении, то назад она не возвратится. Ее кинетическая энергия никогда не будет равна нулю, так как  $E_0 = 0$  и  $E_0 > U(x)$  при любом  $x \neq x_1$ . Следовательно, частица никогда не сможет остановиться и повернуть назад. Это видно из рисунка (5.3), так как в таком поле при  $E_0 = 0$  нет другой точки остановки, кроме  $x_1$ . Итак, не вдаваясь в детали поведения  $U(x)$  и не решая уравнение движения, можно прийти к заключению, что если  $U(x)$  имеет единственный абсолютный максимум, то нетривиальных возвращающихся в точку  $x_1$  (при  $x(-\infty) = 0$ ) движений нет. Допускаются только тривиальные решения  $x(t) = x_1$  для всех  $t$ .

В случае поля  $U(x)$ , изображенного на рис. (5.3), движение может начинаться при  $t = -\infty$  из любой точки  $x_{-1}, x_2, x_2$ , при соответствующих начальных условиях, а при  $t = \infty$  частица должна приходить в любую из точек  $x_{-1}, x_2, x_2$ . Такое движение возможно. Например, частица может стартовать с вершины  $x_1$  при  $t = -\infty$  и подойти к вершине



$x_{-1}$  асимптотически при  $t = \infty$ . Или же если при  $t = -\infty$ ,  $x(-\infty) = x_1$ , то это движение может иметь начало в точке  $x_1$ , а конец в  $x_2$  (или  $x_{-1}$ ). Процесс может идти в двух направлениях. Тем не менее, существуют только четыре нетривиальные возможности. Например, не могут осуществляться циклические движения типа  $x_{-1} \rightarrow x_1 \rightarrow x_{-1}$  или  $x_{-1} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ . Действительно, при  $x = x_1$  обращаются в нуль  $U(x_1)$ ,  $U'(x_1)$ . Следовательно, из уравнений

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = -U(x), \quad m\ddot{x} = -U'(x) \quad (20.3)$$

видим, что  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ . Но вместе с ними

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{(U')'}{m} \dot{x} = -\frac{U''x}{m} = 0, \\ \dots \\ \dot{x} &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{U'' \dot{x}}{m} \right) = -\frac{U''' \dot{x}^2}{m} - \frac{U'' \ddot{x}}{m} = 0 \end{aligned} \quad (21.3)$$

и т. д. Таким образом, все производные  $\left. \frac{d^n x}{dt^n} \right|_{x=x_1} = 0$ . Частица, покинув вершину  $x_{-1}$ , может только подойти к точке  $x_1$  при  $t = -\infty$ , где все производные движения исчезают. Она не может вернуться назад в точку  $x_{-1}$  или пройти дальше к точке  $x_2$ .

Резюмируя, можно сказать, что если  $U(x)$  имеет только единственный максимум, тогда есть только тривиальные  $x(t) = x_1$  “возвращающиеся траектории”, если  $U(x)$  имеет  $l$  вырожденных, т. е. одинаковых по величине максимумов  $U(x_1) = U(x_2) = \dots = U(x_l)$ , то можно получить  $2(l-1)$  типов решений, соединяющих при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$  любые два соседних максимума. При этом есть и тривиальные (не зависящие от  $t$ ) решения. Рассмотренная чисто механическая задача в дальнейшем может оказаться полезной при исследовании статических полевых конфигураций в так называемой двумерной теории поля. В самом деле, статическое (т. е. не зависящее от времени) уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\Phi''(z) = \frac{\partial U}{\partial \Phi},$$

т. е. оно аналогично уравнению Ньютона, в котором роль координаты  $x(t)$  играет полевая переменная  $\Phi(z)$ , а роль времени  $t$  - пространственная координата  $z$ , а  $U(x) = -U(\Phi)$ . Рассмотренным выше начальным условиям в теории поля соответствуют определенные граничные условия, а решениям  $x(t)$  соответствуют решения, описывающие некоторые полевые конфигурации  $\Phi(t)$ . Среди этих решений при некоторых потен-

циалах  $U(\Phi)$  будут решения с локализованной плотностью энергии поля  $\Phi$  и с конечной полной энергией. Решения, зависящие от времени, удовлетворяют уравнению поля

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial \Phi},$$

причем если полная энергия статических решений для некоторого заданного потенциала  $U(\Phi)$  конечна, то соответствующие  $\Phi(t, z)$  называются “уединенными волнами”.

## Глава 4

### ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

#### 4.1. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

В центрально-симметричном поле сила, действующая на частицу, по абсолютной величине зависит только от  $|\vec{r}| \equiv r$ :

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.4)$$

и направлена в каждой точке вдоль радиуса-вектора  $\vec{r}$ . Выше было показано, что в центральном поле сохраняется момент импульса частицы относительно центра поля  $\vec{L} = \vec{L}_0$ . Траектория частицы либо проходит через центр поля, если  $\vec{L}_0 = 0$  (так как тогда  $\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$ ,  $\dot{\phi} = 0$ ,  $L_z = 0$  и, следовательно, траектория является прямой, проходящей через точку  $x = y = z = 0$ ) либо лежит целиком в одной плоскости, проходящей через центр поля и перпендикулярной постоянному вектору  $\vec{L}_0 \neq 0$ . Действительно, так как

$$\vec{L} = m[\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}], \quad (2.4)$$

то  $(\vec{L} \cdot \vec{r}) = (\vec{L} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$ . Учитывая, что  $\vec{L} = \vec{L}_0$ , получим уравнение плоскости, в которой лежит траектория, в явном виде:

$$(\vec{L}_0 \cdot \vec{r}) = 0. \quad (3.4)$$

Как было показано в 2.3, общее решение динамической задачи должно зависеть от шести независимых постоянных интегрирования, которыми определяются шесть интегралов движения (три первых и три вторых интеграла)<sup>1</sup>. В качестве трех независимых первых интегралов движения можно выбрать полную энергию частицы

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = E_0 \quad (4.4)$$

и любые две проекции момента импульса  $\vec{L}$ . Три первых интеграла  $\vec{L} = \vec{L}_0$  не являются независимыми, поэтому мы берем только два из трех. Одним из вторых интегралов движения является соотношение (3.4), так как оно не содержит скоростей частицы и следует из уравнений движения.

Направим ось  $Oz$  декартовой системы координат по вектору  $\vec{L}_0$  и далее будем определять положение точки в плоскости орбиты полярными координатами  $\rho$  и  $\varphi$  (рис. 1.4). В цилиндрической системе координат интегралы энергии и момента импульса запишем в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + U(\rho) = E_0, \quad (5.4)$$

$$m\rho^2 \dot{\varphi} = L_0, \quad (6.4)$$

где  $L_0 = \sqrt{L_{0x}^2 + L_{0y}^2 + L_{0z}^2}$ .

Выражая  $\dot{\varphi}$  через  $L_0$  из (6.4) и подставляя в (5.4), получим

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} + U(\rho) = E_0. \quad (7.4)$$

Отсюда

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)} \quad (8.4)$$

или, разделяя переменные и интегрируя, находим

$$t = \pm \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}} + C_5. \quad (9.4)$$

Здесь  $C_5$  - постоянная интегрирования, а само соотношение есть еще один второй интеграл.

Последний второй интеграл найдем, исключив  $t$  из (6.4), (8.4):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \pm \frac{m\rho^2}{L_0} \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}. \quad (10.4)$$

Разделяя в (10.4) переменные и интегрируя, получим

$$\varphi = \pm \int \frac{L_0}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}} + C_6. \quad (11.4)$$

Это соотношение является вторым интегралом движения; оно определяет связь  $\rho$  и  $\varphi$ , т. е. представляет уравнение траектории. Формулой (9.4) определяется в неявном виде функция  $\rho(t)$ . Если эта функция найдена, то, подставляя ее в (6.4) и интегрируя (6.4) по времени, получим  $\varphi(t)$

$$\varphi = \int_0^t \frac{L_0}{m\rho^2(t)} dt + \varphi(t_0). \quad (12.4)$$

Из (7.4) видно, что радиальную часть движения в центральном поле можно рассматривать как одномерное движение в поле с “эффeктивной” потенциальной энергией

---

<sup>1</sup> Общее решение задачи динамики материальной точки должно определяться функциями вида (16.2), зависящими от времени и от шести независимых произвольных постоянных интегрирования, выбором которых можно удовлетворить любым начальным условиям.

$$U_{\text{эфф}} = U(\rho) + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \quad (13.4)$$

в области  $\rho > 0$ . Величину  $\frac{L_0^2}{2m\rho^2} = \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2}$  называют центробежной энергией. Границы области движения частицы в радиальном направлении определяются действительными корнями уравнения

$$E_0 - U(\rho) - \frac{L_0^2}{2m\rho^2} = 0. \quad (14.4)$$

В этих точках  $\dot{\rho} = 0$ , но  $\dot{\varphi} \neq 0$ , так что частица не останавливается (как при настоящем одномерном движении), а продолжает движение со скоростью  $\rho\dot{\varphi}$ . Это точки поворота траектории. В них функция  $\dot{\rho}(t)$  меняет знак, а  $\rho(t)$  переходит от уменьшения к увеличению и наоборот.

Если уравнение (14.4) имеет корень  $\rho_{\min}(E_0)$ , а область допустимого движения ограничена лишь условием  $\rho > \rho_{\min}$  (рис.2.4), то движение частицы инфинитно – она приходит из бесконечности и уходит на бесконечность. В случае, когда начальное состояние  $\rho(t_0)$  удовлетворяет условию  $\rho_{\max} > \rho(t_0) > \rho_{\min}$  (рис. 3.4), область изменения координаты  $\rho$  частицы с энергией  $E_0$  имеет две границы. Движение финитно, а траектория в общем случае целиком находится внутри кольца, ограниченного окружностями  $\rho = \rho_{\min}$  и  $\rho = \rho_{\max}$  (рис. 4.4).

**(Здесь рисунки)**

Угол поворота радиуса-вектора  $\Delta\varphi$  за время, в течение которого  $\rho$  меняется от  $\rho_{\max}$  до  $\rho_{\min}$  и затем до  $\rho_{\max}$  равен

$$\Delta\varphi = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{L_0}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2m(E_0 - U(\rho) - L_0^2/2m\rho^2)}} \quad (15.4)$$

Если  $\Delta\varphi \neq 2\pi \frac{k}{n}$ , где  $k, n$  целые числа, то траектория не замкнута, хотя движение финитно. За бесконечное время траектория бесконечное число раз пройдет через точки  $\rho_{\min}$  и  $\rho_{\max}$  и заполнит все кольцо. Траектория будет замкнутой, если  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{k}{n}$ . Ее замыкание произойдет через  $n$  повторений периода времени, при котором  $\rho$  меняется от  $\rho_{\min}$  до  $\rho_{\max}$  и затем до  $\rho_{\min}$ . Радиус-вектор частицы сделает при этом  $k$  полных оборотов. Из (15.4) видно, что  $\Delta\varphi$ , как и условие замкнутости траектории, зависит

от начальных условий ( $E_0$  и  $L_0$ ). Только в двух типах центральных полей, независимо от начальных условий, траектории всех финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы равна либо  $-\alpha/r$  ( $\alpha > 0$ ), либо  $\alpha r^2$  ( $\alpha > 0$ ).

Резюмируя, сформулируем следующие из нашего рассмотрения общие свойства движения, справедливые для любого центрального поля:

- 1) траектория лежит в неподвижной плоскости, проходящей через центр поля, а радиус-вектор частицы описывает равные площади за равные промежутки времени (постоянство  $\vec{L}$  или  $\vec{\sigma}$ );
- 2) угол  $\varphi$  меняется монотонно со временем;
- 3) траектория точки симметрична относительно апсидальных векторов (прямых, проходящих через центр силы и “точку поворота”).

## 4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ.

Аналогично тому, как это было сделано в одномерном случае при графическом задании потенциальной энергии частицы  $U(x)$ , классификацию классически допустимых траекторий частицы, движущейся в центральном поле, можно провести на графике эффективной потенциальной энергии  $U_{\text{эфф}}$ . Рассмотрим для этого несколько примеров. В первом примере изучим движение частицы в цилиндрической системе координат, когда на частицу не действуют никакие силы. Выбирая систему координат так, что движение частицы происходит в плоскости  $xOy$  имеем

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E_0 - L_0^2/2m\rho^2, \quad \dot{\phi} = L_0/m\rho^2,$$

откуда следует, что если  $L_0 = 0$  то  $\varphi = \varphi_0$  и  $\rho = \pm\sqrt{\frac{2E_0}{m}}t + \rho_0 > 0$ , где  $\varphi_0 = \varphi(0)$  и

$\rho_0 = \rho(0)$ , т. е. траектория частицы представляет собой прямую (рис. 5.4), проходящую через начало координат. Пусть  $L_0 \neq 0$  (рис. 6.4), тогда  $\rho_{\min} = \sqrt{L_0^2/2mE_0}$ . Траектория, как можно убедиться, является любой прямой, проходящей от начала координат на расстоянии  $\rho_{\min}$  (это минимальное расстояние от “центра поля”) и касающейся окружности радиуса  $\rho_{\min}$ .

Найдем  $\rho(\varphi)$  в явном виде:

$$\varphi = \int \frac{L_0}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2m(E_0 - L_0^2/2m\rho^2)}} + C = \arccos(\rho_{\min}/\rho) + C. \quad (16.4)$$

Направим полярную ось из начала координат к  $\rho_{\min}$  т. е. угол будем отсчитывать от этого направления. Из (16.4) следует, что  $C = 0$  и уравнение траектории  $\rho = \rho_{\min}/\cos\varphi$  есть уравнение прямой (рис. 7.4), параллельной оси  $Oy$ . Движение как при  $L_0 = 0$ , так и при  $L_0 \neq 0$  происходит в неограниченной области, т. е. является инфинитным.

В качестве второго примера рассмотрим движение частицы массы  $m$  в поле  $U(r) = kr^2/2$  (так называемый трехмерный изотропный гармонический осциллятор),  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Очевидно, что если  $\vec{L}_0 = 0$ , то задача сводится к задаче одномерного гармонического осциллятора, рассмотренной выше. В этом случае частица будет совершать простое прямолинейное гармоническое колебание. Область движения ограничена, а траектория проходит через начало системы координат (центр поля). Если  $\vec{L}_0 \neq 0$ , то

$$U_{\text{эфф}} = \frac{k\rho^2}{2} + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} \quad (\text{рис. 8.4})$$

и движение классически допустимо, если только энергия частицы  $E_0 \geq U_{\text{эфф min}}$  где  $U_{\text{эфф min}} = U_{\text{эфф}}(\rho_{\text{min}}) = (L_0^2 k/m)^{1/2}$  - минимальное значение эффективной энергии. Здесь  $\rho_{\text{min}}$  определяется условием

$$\frac{dU_{\text{эфф}}}{d\rho} = k\rho - \frac{L_0^2}{m\rho^3} = 0, \quad \rho_m^2 = (L_0^2/km)^{1/2}.$$

Движение частицы с полной энергией  $E_0$  заключено в области  $\rho_1^2 \leq \rho^2 \leq \rho_2^2$ , где  $\rho_{1,2}^2 = E_0/k \pm \sqrt{E_0^2/k^2 - L_0^2/km}$  - “точки поворота” траектории. Нетрудно показать, что траектория в неявном виде задается интегралом

$$\varphi = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} + \tilde{C}, \quad x = \frac{1}{\rho^2},$$

где  $c = -1$ ,  $b = 2mE_0/L_0^2$ ,  $a = -km/L_0^2$ . Вычисляя интеграл и затем обращая формулу, получим

$$\rho^2 = 2 / (b + \sqrt{b^2 - 4ac} \cos 2(\varphi - \varphi_0)).$$

Если полярную ось направить к  $\rho_{\text{min}}$  то  $\varphi_0 = 0$ ,

$$\rho_1^2 = \frac{2}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \rho_2^2 = \frac{2}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Рис. 8.4

Рис. 9.4

Траекторией частицы является эллипс, центр которого находится в центре силы. Траектория дважды касается окружностей с радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно. На рис. 9.4 изображен случай, когда полярная ось направлена к  $\rho_{\text{min}}$  т. е.  $\varphi_0 = 0$ .

### 4.3. ПАДЕНИЕ НА ЦЕНТР ПОЛЯ

Принципиально новая ситуация возникает, если, например, центральное поле имеет вид

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}, \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Пусть  $\vec{L}_0 \neq 0$  тогда  $U_{эфф}$  имеет вид, как на рис. 10.4. В точке  $\rho_1 = L_0^2 - \sqrt{(L_0^4 - 12\gamma\alpha m^2)}/2m\alpha$   $U_{эфф}$  имеет абсолютный максимум, а в точке  $\rho_2 = L_0^2 + \sqrt{(L_0^4 - 12\gamma\alpha m^2)}/2m\alpha$  - относительный минимум. Будем считать, что момент импульса частицы удовлетворяет неравенству  $L_0^4 > 12\gamma\alpha m^2$ . Если это так, то  $U_{эфф}$  имеет два экстремума, как на рис. 10.4. Заметим, что если  $L_0^4 = 12\gamma\alpha m^2$ , то  $\rho_{1,2} = \rho_0 = L_0^2/2m$  и  $U'_{эфф}(\rho) = U''_{эфф}(\rho) = 0$ ,  $U'''_{эфф}(\rho) > 0$ , а если  $L_0^4 < 12\gamma\alpha m^2$ , то  $U_{эфф}$  вообще не имеет экстремумов. Из графика видно, что если  $E_0 > U_{эфф\max}$  то движение происходит в неограниченной области пространства и, в частности, частица может достичь центра поля (ее радиальная координата может стать равной нулю). Такую ситуацию называют падением на центр поля. Следует заметить, что падение на центр поля возможно при любой энергии, если частица в начальный момент времени находится левее точки  $\rho_1$  (разумеется, в классически доступной области).

Рис. 10.4

Рис. 11.4

Рис. 12.4



Рис. 13.4

Получим условие падения частицы на центр поля в общем случае. Из (14.4) следует, что в классически доступной области движения должно выполняться неравенство

$$\rho^2 E_0 \geq \rho^2 U(\rho) + L_0^2/2m. \quad (17.4)$$

При падении на центр поля  $\rho \rightarrow 0$  и, значит, так как  $E_0$  ограничена, то

$$0 \geq \rho^2 U(\rho) + L_0^2/2m. \quad (18.4)$$

Очевидно, если потенциальная энергия при малых  $\rho$  ведет себя подобно степенной функции  $U(\rho) = -\frac{\beta}{\rho^n}$ , то это условие выполняется при  $n = 2$ , если  $\beta > L_0^2/2m$ ; при  $n > 2$ , если  $\beta > 0$ .

Вернемся к нашей задаче. Если энергия частицы равна  $E_1$  то качественно траектория имеет вид, как на рис. 11.4, где изображен случай  $E_1 < U_{эфф\max}$ . Вообще, чем ближе  $E_1$  к нулю при фиксированном  $L_0$ , тем меньше искривлена траектория (тем дальше от центра проходит частица и, следовательно, тем меньше она взаимодействует с центром). Если энергия частицы  $E$  равна  $U_{эфф\max} + \delta$ , где  $0 < \delta \ll U_{эфф\max}$ , то скорость частицы в радиальном направлении вблизи  $\rho_1$  уменьшается, и в этом направлении она движется очень медленно. При этом поскольку  $\rho_1 \neq \infty$ , то  $\dot{\phi} = L_0/m\rho_1^2$  есть конечная величина и радиус-вектор вращается с угловой скоростью  $\dot{\phi}$ . Поэтому частица может достаточно долго вращаться вокруг центра, прежде чем она пройдет интервал значений  $\rho \sim \rho_1$  (рис. 12.4). При  $E$ , точно равной  $U_{эфф\max}$ , траектория частицы представляет собой либо спираль, приближающуюся к окружности радиуса  $\rho_1$  с центром в центре поля (извне, если  $\rho_0 > \rho_1$ , или изнутри, если  $\rho_0 < \rho_1$ ), либо окружность радиуса  $\rho_1$  (если  $\rho_0 = \rho_1$ ).

Движение по окружности неустойчиво, так как сколь угодно малое изменение начальных условий (т. е.  $E_0$  или  $L_0$ ) приводит к траектории, удаляющейся от этой окружности при больших  $t$  (рис. 13.4).

Наконец, при  $U_{эфф\min} < E < 0$ ,  $\rho_{\min} < \rho_0 < \rho_{\max}$  частица совершает финитное движение в области  $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$ . Траектория в общем случае (т. е. при произвольных начальных условиях) незамкнута. При  $E = U_{эфф\max}$  частица движется по устойчивой орбите - окружности радиуса  $\rho_2$ ; при этом  $\dot{\rho} = 0$ .

#### 4.4. АТТРАКТОРЫ\*

Границы области движения частицы и вид траектории существенно зависят от начальных условий. Выбирая разные начальные условия, мы можем получить целый пучок траекторий. Эти траектории похожи на линии тока в жидкости, что дало основание иногда называть их “линиями тока”, а их совокупность - “потоками”.

Выше мы показали, что в наших примерах траектории на плоскости не обязательно приходят из бесконечности и заканчиваются на бесконечности; они могут по-разному заканчиваться при конечных значениях координат. Эти свойства являются достаточно общими. Точки, в которых траектории заканчиваются, являются как бы точками притяжения для линий тока; сами конечные точки называются аттракторами. На плоскости траектории могут не только заканчиваться в точках (как на рис. 14.4,а), но и навиваться на так называемый предельный цикл (см. рис. 13.4). Предельный цикл будет устойчивым, если к нему притягиваются соседние траектории. Он также принадлежит к классу аттракторов.

Рис. 14.4

Аттракторы - точки на плоскости - бывают двух типов: узлы и фокусы; они отличаются видом зависимости координат от времени. На рис. 14.4,а изображены траектории, заканчивающиеся в (устойчивом) узле. Если обратить время, т. е. заменить  $t$  на  $-t$ , то траектории будут выходить из узла. Такой узел будет уже неустойчивым. На рис. 14.4,б приведена временная зависимость координаты  $x(t)$  в случае узла.

Понятия узла, фокуса и предельного цикла, как видно, здесь не геометрические. Они скорее определяют тип расположения траекторий автономной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y).$$

Автономной называют систему уравнений, в которой функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  явно от времени не зависят.

На рис. 15.4,а изображены траектории, заканчивающиеся в (устойчивом) фокусе. Они примыкают к точке  $A$ , наматываясь на нее подобно логарифмическим спиралям. В случае узла траектории подходят как бы по нормали к окружности радиуса  $r \rightarrow 0$  с центром в узле. При замене  $t$  на  $-t$  траектории, изображенные на рис. 15.4,а будут выходить из фокуса, который станет неустойчивым. На рис. 15.4,б дана зависимость

---

\*Более подробно об этом рекомендуем прочесть в книге: Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985.

координат  $x(t)$  от времени  $t$  в случае фокуса. Заметим, что  $x, y$  не обязательно декартовы координаты.

Рис. 15.4

Следует иметь в виду, что классификацию особых точек (линий) проводят на основе системы уравнений 1-го порядка по времени. Можно дать достаточно строгое математическое определение устойчивого многообразия (особой точки). Под устойчивым многообразием (особой точки) понимается множество всех точек, которые являются начальными точками траекторий, заканчивающихся при  $t = \infty$  в данной особой точке. Под неустойчивым многообразием (особой точки) понимается множество начальных траекторий, заканчивающихся в пределе  $t = -\infty$  в данной особой точке.

#### 4.5. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

Траектория частицы независимо от начальных условий является замкнутой при движении частицы в поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0. \quad (19.4)$$

Рассмотрим задачу о движении частицы массы  $m$  в этом поле, не ограничиваясь случаем  $\alpha > 0$ . Если  $\alpha > 0$ , то сила  $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ , с которой поле действует на частицу, является силой притяжения (она направлена по радиусу-вектору  $\vec{r}$  центру поля), если  $\alpha < 0$ , то на частицу действует сила отталкивания. Эффективная энергия частицы в том и другом случае изображена на рис. 16.4.

Из анализа графика  $U_{эфф}$  следует, что движение частицы в поле притяжения будет инфинитным, если  $E_0 \geq 0$  (в области  $\rho > \rho_{\min}$ ), и финитным, если  $0 > E_0 > U_{эфф \min}$  (в области  $\rho_2 \geq \rho \geq \rho_1$ ). При  $U_{эфф \min} = E_0$  частица будет двигаться по окружности. В поле отталкивания полная энергия частицы всегда положительна, а движение инфинитно.

Рис. 16.4

Траектория частицы, ее орбита определяется интегралом.

$$\varphi = \pm \int \frac{L_0}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2\left(E_0 \pm \frac{|\alpha|}{\rho} - \frac{L_0^2}{2m\rho^2}\right)}} + C = \pm(-) \int \frac{d\left(u \mp \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u \mp \frac{1}{p}\right)^2}} + C, \quad u = \frac{1}{\rho}.$$

Здесь верхние знаки в подынтегральном выражении соответствуют случаю  $\alpha > 0$ , а нижние - случаю  $\alpha < 0$ , введены следующие обозначения:  $p = L_0^2/m|\alpha|$  - параметр,  $\varepsilon = \sqrt{1 + 2E_0L_0^2/m\alpha^2}$  - эксцентриситет орбиты. Вычисляя интеграл, получим

$$\varphi - C = \pm \arccos \frac{u \pm 1/p}{\varepsilon/p}. \quad (20.4)$$

Опуская знак перед функцией справа ввиду четности косинуса и обращая формулу, найдем уравнение орбиты в явном виде:

$$\rho = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - C)}. \quad (21.4)$$

Удобно полярную ось направить на ближайшую к центру силы точку траектории. Тогда  $C = 0$ . Уравнением (21.4) описывается кривая второго порядка, в фокусе которой находится начало координат<sup>2</sup>. Из аналитической геометрии известно, что в зависимости от величины  $\varepsilon$  траектории вида (21.4) представляют собой гиперболу (при  $\varepsilon > 1$ ), параболу (при  $\varepsilon = 1$ ), эллипс ( $\varepsilon < 1$ ) или окружность ( $\varepsilon = 0$ ). Учитывая зависимость  $\varepsilon$  от полной механической энергии частицы, получим, что в потенциальном поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ,  $\alpha > 0$ , траекторией частицы будет гипербола, если  $E_0 > 0$  - парабола, если  $E_0 = 0$  - эллипс, если  $0 > E_0 > U_{эфф\ min}$  - окружность, если  $E_0 = U_{эфф\ min}$ ; в случае отталкивания траекторией частицы всегда будет гипербола, так как в этом случае  $\varepsilon > 1$  (а  $E_0 > 0$ ) всегда.

Рассмотрим финитное движение частицы в поле  $U(r) = -\alpha/r$ , когда орбита является эллипсом. По известным формулам аналитической геометрии можно найти большую и малую полуоси эллипса в виде

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E_0} = \frac{\alpha}{2|E_0|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{L_0^2}{2m|E_0|}}$$

<sup>2</sup> Это уравнение конического сечения с фокусом в начале координат. Фокус - это точка  $F$ , лежащая в плоскости кривой второго порядка и такая, что отношение расстояния любой точки кривой до  $F$  к расстоянию до заданной прямой (директрисы) равно постоянному числу (эксцентриситету). Конические сечения - линии, которые получаются сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину.

Отсюда видно, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента импульса) частицы. В квантовой механике именно это свойство приводит к правилу квантования по Бору.

Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (фокуса эллипса) равны

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon), \quad \rho_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon) \quad (22.4)$$

Заметим, что эти значения можно получить и как корни уравнения  $U_{\text{эфф min}} - E_0 = 0$ .

Период движения  $T$  определим с помощью закона сохранения момента импульса, записанного в форме

$$L_0 = 2m \frac{dS}{dt}, \quad (23.4)$$

где  $dS$  площадь, очерчиваемая радиус-вектором частицы за время  $dt$ . Интегрируя это равенство по времени от нуля до  $T$ , получим

$$L_0 T = 2mS = 2m\pi ab. \quad (24.4)$$

Здесь мы учли, что  $S = \pi ab$ , так как орбитой является эллипс. Отсюда находим

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{ma^3}{\alpha} = \frac{\pi^2 m \alpha^2}{2|E_0|^3}, \quad (25.4)$$

т. е. квадрат периода обращения пропорционален кубу линейных размеров орбиты (третий закон Кеплера) и зависит только от полной энергии частицы.

При  $E \geq 0$  движение инфинитно. В поле притяжения при  $E_0 > 0$  траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус). Наименьшее расстояние, на которое частица подходит к центру поля, равно

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(\varepsilon - 1),$$

где  $a = p / (\varepsilon^2 - 1) = a / 2E_0$  - полуось гиперболы.

В случае  $E_0 = 0$  частица движется по параболе, при этом наименьшее расстояние  $\rho_{\min} = p/2$ . Этот случай осуществляется если при  $t = \infty$  частица покоится.

В поле отталкивания траектория, как уже говорилось выше, является гиперболой (см. рис. 16.4). Наименьшее расстояние от орбиты до центра поля в этом случае равно

$$\rho_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1} = a(1 + \varepsilon),$$

где  $a = p / (\varepsilon^2 - 1) = \frac{|\alpha|}{2E_0}$  полуось гиперболы.

#### 4.6. ВЕКТОР-ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА

Поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  допускает существование векторного интеграла движения, специфического именно для этого поля. Этот вектор был построен еще Лапласом. Мы будем называть его вектором Лапласа, хотя в квантовой механике аналогичный векторный оператор принято называть вектором Рунге-Ленца. Докажем, что вектор

$$\vec{J} = \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{L} \right] - \frac{\alpha \vec{r}}{r}$$

является интегралом движения. Для этого вычислим  $\dot{\vec{J}}$ :

$$\dot{\vec{J}} = \left[ \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{L} \right] - \left[ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{L}} \right] - \frac{\alpha \dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha \vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} \quad (26.4)$$

Подставив в (26.4) выражение

$$\vec{L} = m \left[ \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right]$$

и используя уравнения движения частицы в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  в виде

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha \vec{r}}{r^3}$$

нетрудно показать, что  $\dot{\vec{J}} = 0$ , т. е.  $\vec{J} = \vec{J}_0$ .

Из равенства нулю скалярного произведения  $\dot{\vec{J}} = 0$  следует, что вектор  $\vec{J}$  перпендикулярен  $\vec{L}$  и лежит в плоскости орбиты. Направление вектора  $\vec{J}_0$  найдем, воспользовавшись законом сохранения  $\vec{J} = \vec{J}_0$ . Вычислим  $\vec{J}$  в момент нахождения частицы в точке  $\rho_{\min}$ . Полярную ось направим из фокуса к  $\rho_{\min}$ . В декартовой системе координат с осью  $Ox$ , направленной по полярной оси, и  $Oz$  - по  $\vec{L}_0$ , получим

$$\left[ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{L} \right] = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ 0 & x\dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{vmatrix} = \vec{n}_x x \dot{\phi} L_0, \quad \frac{\alpha \vec{r}}{r} = \alpha \vec{n}_x.$$

Следовательно,  $\vec{J} = (x\dot{\phi}L_0 - \alpha)\vec{n}_x = (J, 0, 0)$ , т. е.  $\vec{J}$  направлен от фокуса (центра силы) в ближайшую точку траектории. Модуль вектора  $\vec{J}$  равен

$$J = \rho_{\min} \frac{L_0^2}{m\rho_{\min}^2} - \alpha = \frac{L_0^2}{m\rho_{\min}} - \alpha = \alpha \varepsilon.$$

Заметим, что интеграл движения  $\vec{J}$  является однозначной функцией механического состояния частицы. Мы знаем, что в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  такими однозначными функциями положения и скорости частицы являются (кроме  $\vec{J}$ ) интегралы движения

$E_0$  и  $\vec{L}_0$ . Появление такого дополнительного однозначного интеграла связано с так называемым вырождением движениям возможностью решения динамической задачи в различных координатах.

Пример. Исследовать движение частицы массы  $m$  в центральном поле

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & \text{при } r < R \\ 0, & \text{при } r > R \end{cases}$$

при различных значениях энергии и момента импульса частицы. Поле  $U(r)$ , которое называют “сферической прямоугольной потенциальной ямой”, изображено на рис. 17.4, график эффективной энергии дан на рис. 18.4.

Рис. 17.4

Эффективная энергия частицы имеет вид

$$U_{\text{эфф}} = \frac{L_0^2}{2mr^2} \text{ при } r > R, \quad U_{\text{эфф}} = -U_0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} \text{ при } r < R.$$

Поэтому в области  $r > R$  траектория частицы определяется интегралом (16.4). Это прямая, отстоящая от центра поля на расстоянии  $L_0 / \sqrt{2mE_0}$ . Из рис. 18.4 видно, что если  $E_0 < L_0^2 / 2mR^2$ , и  $r(t_0) > R$  то траекторией частицы всегда будет прямая.

При  $r < R$  и энергии, заключенной в интервале

$$\frac{L_0^2}{2mR^2} - U_0 < E_0 < \frac{L_0^2}{2mR^2},$$

частица движется внутри сферы, испытывая отражения на границе при  $r = R$ . Скорость частицы постоянна и определяется из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = E_0 + U_0, \quad v = \sqrt{\frac{2(E_0 + U_0)}{m}}.$$

Записав его в виде

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E_0 + U_0 - \frac{L_0^2}{2mr^2},$$

находим точку поворота:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{L_0^2}{2m(E_0 + U_0)}}.$$

Для частицы с энергией  $\frac{L_0^2}{2mR^2} - U_0 < E_0 < \frac{L_0^2}{2mR^2}$  точка  $R$  представляет собой непроходимый барьер, от которого она отражается. Между двумя точками отражения частица движется по отрезку прямой (рис. 19.4)

$$r = \frac{r_{\min}}{\cos(\varphi + C)}.$$

Рис. 19.4

Рис. 20.4

На сфере  $r = R$  происходит отражение частицы, так что ее скорость меняет направление на угол, равный  $\alpha = 2\varphi_0$ , где

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^R \frac{L_0}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + U_0 - L_0^2/2mr^2)}} = \arccos \frac{r_{\min}}{R}.$$

Условие замкнутости траектории  $\varphi = \pi l$ , или

$$\arcsin \frac{L_0}{R\sqrt{2m(E + U_0)}} = \frac{k\pi}{2}.$$

При выполнении этого условия траекторией частицы является замкнутая ломаная линия.

При  $E > \frac{L_0^2}{2mR^2}$  частица движется в инфинитной области. Вне сферы радиуса  $R$  частица движется по прямой

$$r = \frac{\sqrt{L_0^2 / 2mE}}{\cos(\varphi + C)},$$

а внутри сферы - также по прямой (рис. 20.4)

$$r = \frac{\sqrt{L_0^2 / 2m(E + U_0)}}{\cos(\varphi + C)}.$$

Следовательно, имеет место преломление траектории частицы на угол

$$\arcsin \frac{L_0}{R\sqrt{2m(E + U_0)}} - \arcsin \frac{L_0}{R\sqrt{2mE}}.$$

Для определения угла преломления удобно выбрать  $C = -\frac{\pi}{2}$ .



**Глава 5**  
**СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.**  
**ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ**  
**ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА, КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И ЭНЕРГИИ**  
**ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК**

**5.1. ПОЛНЫЙ ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ**

Будем предполагать, что на систему из  $N$  материальных точек действуют внешние силы  $\vec{F}_i^{ext}$  и что силы взаимодействия между точками системы подчиняются третьему закону Ньютона. Силы взаимодействия между точками системы называют внутренними. По предположению внутренние силы между двумя точками системы, скажем  $i$ -й и  $j$ -й, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ ,  $\vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)f$ . Полагаем также, что  $\vec{F}_{ii} = 0$ . Запишем уравнения движения  $i$ -й точки:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \quad (1.5)$$

и просуммируем (1.5) по всем точкам:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j,i=1 \\ i < j}}^N (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) \quad (2.5)$$

Определим полный импульс системы точек как сумму

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (3.5)$$

Учитывая, что второй член в правой части (2.5) равен нулю, получаем закон изменения полного импульса системы точек в виде

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \quad (4.5)$$

Вектор  $\vec{P}$  можно записать и в другом виде:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \right) = M \dot{\vec{R}} \quad (5.5)$$

Здесь мы ввели обозначения  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  для полной массы системы материальных точек и

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (6.5)$$

для радиуса-вектора центра масс (или центра инерции) системы. С учетом (6.5) уравнения (4.5) можно переписать в виде

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}. \quad (7.5)$$

Систему называют замкнутой, или изолированной, если на нее не действуют внешние силы:  $\vec{F}_i^{ext} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Из (7.5) видим, что внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс замкнутой системы. Они также не будут влиять на движение центра масс системы, если внешние силы не зависят от координат, т. е. являются однородными.

Эти утверждения можно сформулировать в виде теоремы *Если сумма внешних сил, действующих на систему частиц, равна нулю, то полный импульс  $\vec{P}$  не изменяется во время движения.* Полный импульс есть трехмерный вектор<sup>1</sup>. Поэтому если проекция силы на какое-то направление равна нулю, то сохраняется  $P_n$ , соответствующая проекция полного импульса системы точек. Пусть, например,  $(\vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{n}) = 0$ , тогда  $P_n = (\vec{P} \cdot \vec{n}) = P_{n0}$ .

**5.2. ПОЛНЫЙ (КИНЕТИЧЕСКИЙ) МОМЕНТ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ**

<sup>1</sup> А. Эйнштейн определил 4-импульс механической системы  $p_\mu$ ,  $\mu=0, 1, 2, 3$ , как величину, обладающую следующими свойствами:

1)  $p_\mu$  - 4-вектор Лоренца; 2)  $p_\mu$  - величина аддитивная, т. е. для системы, состоящей из нескольких (скажем,  $l$ ) подсистем  $p_\mu = \sum_{i=1}^l p_{\mu(i)}$  — сохраняющийся 4-вектор. Тем же свойствам удовлетворяет трехмерный вектор  $\vec{p}$  в трехмерном пространстве.

Под полным моментом импульса (кинетическим моментом) системы материальных точек понимается сумма

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i].$$

Найдем  $\dot{\vec{L}}$ :

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N [\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i] = \sum_{i=1}^N [\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{ext}] + \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ji}]. \quad (8.5)$$

Мы учли, что каждый вектор  $[\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i]$  равен нулю, и использовали уравнения движения (1.5). Преобразуем сумму

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ji}] = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ji}] = 0.$$

Здесь мы приняли во внимание, что  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ . Поэтому

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i^{ext}] \quad (9.5)$$

Производная по времени кинетического момента равна полному моменту внешних сил.

*Теорема. Если суммарный момент внешних сил (проекция на какое-либо направление), действующих на систему материальных точек, равен нулю, то ее кинетический момент (соответствующая его проекция) остается неизменным во времени.*

Подчеркнем, что по предположению внутренние силы, действующие в системе, подчиняются третьему закону Ньютона.

Получим удобное представление кинетического момента системы частиц относительно точки  $O$  (рис. 1.5). Согласно правилу сложения векторов имеем

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}, \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' + \vec{V},$$

где  $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$  - скорость центра масс системы частиц относительно (неподвижной) системы отсчета с центром  $O$ ,  $\dot{\vec{r}}_i'$  - скорость  $i$ -й точки относительно системы отсчета, движущейся поступательно вместе с центром масс системы частиц. Последняя система отсчета называется системой центра масс. Преобразуем  $\vec{L}$ :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i' \cdot \vec{p}_i] + \left[ \vec{R} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i' \right] + \left[ \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i' \right) \cdot \vec{V} \right] + \sum_{i=1}^N m_i [\vec{R} \cdot \vec{V}] = \vec{L}' + [\vec{R} \cdot \vec{P}]. \quad (10.5)$$

Мы учли, что  $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i' = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0$ , так как начало движущейся системы отсчета совпадает с центром

масс системы частиц и, значит, радиус-вектор центра масс в этой системе отсчета  $\vec{R}' = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i' / M$  равен нулю.

Таким образом, кинетический момент равен сумме кинетического момента, возникающего вследствие движения этой системы материальных точек относительно центра масс и момента импульса в предположении, что вся масса системы материальных точек сосредоточена в центре масс. Подчеркнем что  $\vec{L}$  зависит от выбора точки  $O$ , так как в  $\vec{L}$  явно входит  $\vec{R}$ . Только в том случае, когда центр масс неподвижен относительно  $O$  (тогда  $\vec{P} = 0$ ), кинетический момент не зависит от выбора этой точки и  $\vec{L}$  сводится к  $\vec{L}'$ .

### 5.3. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Умножим скалярно (1.5) на  $d\vec{r}_i$ , и просуммируем результат по всем точкам системы:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i). \quad (11.5)$$

Слева стоит дифференциал кинетической энергии системы точек

$$dT = d \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \left( m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i \right) = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i). \quad (12.5)$$

Кинетическую энергию

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2}, \quad (13.5)$$

используя систему отсчета с началом в центре масс (будем называть ее ЦСО), удобно представить в виде

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i' + \vec{V})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 + \left( \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i' \right) + \frac{MV^2}{2} = T' + \frac{MV^2}{2}. \quad (14.5)$$

Таким образом мы показали, что

*кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии системы частиц в их движении относительно ЦСО и кинетической энергии "центра масс" т. е. кинетической энергии системы в предположении, что вся масса системы точек сосредоточена в центре масс (теорема Кенига).*

Предположим, что внешние и внутренние силы потенциальны и консервативны<sup>2</sup>. Тогда выражение

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i) = - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \cdot d\vec{r}_i \right) = -dU^{ext}$$

является полным дифференциалом скалярной функции  $U^{ext}$ , имеющей смысл потенциальной энергии системы частиц во внешнем поле. Если, кроме того,  $\vec{F}_{ji}$  удовлетворяют третьему закону Ньютона, то они могут быть построены с помощью некоторой функции

$$V_{ij} = V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (15.5)$$

как

$$\vec{F}_{ji} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V_{ij}, \quad \vec{F}_{ij} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} V_{ij}. \quad (16.5)$$

Учитывая, что  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$  и  $\vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)f = -\vec{r}_{ji}f$ , где  $f$  — скалярная функция аргумента  $\vec{r}_{ji}$ , преобразуем двойную сумму:

$$\sum_{j,i=1}^N (\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i) = \sum_{j,i=1;i < j}^N \left\{ (\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i) + (\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j) \right\} = \sum_{j,i=1;i < j}^N (\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ij}) = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{ij}} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \right) = - \frac{1}{2} d \sum_{i,j=1;i \neq j}^N V_{ij}. \quad (17.5)$$

Здесь мы использовали очевидное соотношение

$$\vec{F}_{ji} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V_{ij} = - \frac{\partial}{\partial (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} V_{ij}.$$

Коэффициент 1/2 появился в (17.5), так как при суммировании по  $i, j$  каждый индекс данной пары появляется дважды: при суммировании по  $i$  и по  $j$ .

Мы видим, что можно определить потенциальную энергию системы точек как

$$U = U^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1;i \neq j}^N V_{ij},$$

и если внешние и внутренние силы консервативны, то, собирая все члены вместе, получим

$$dT = -dU, \quad d(T + U) = 0, \quad E = T + U = E_0. \quad (18.5)$$

Эти равенства выражают собой закон сохранения полной механической энергии системы материальных точек. На их основе можно сформулировать теорему:

*Полная механическая энергия консервативной системы материальных точек не изменяется во время движения.*

Кратко рассмотрим общий случай, когда внешние силы явно зависят от времени и в системе точек действуют диссипативные силы. Вывод формулы, определяющей скорость изменения полной механической энергии системы точек, подобен выводу аналогичной формулы для одной точки. В результате получим

$$\dot{E} = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{d(ext)} \cdot \dot{\vec{r}}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{d(int)} \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} + W^d,$$

где  $E$  определяется формулой (18.5), а  $\vec{F}_i^{d(ext)}$ ,  $\vec{F}_i^{d(int)}$  — внешние и внутренние диссипативные силы соответственно.

Из формулы (19.5) следует, что полная механическая энергия системы материальных точек сохра-

<sup>2</sup> Системы, в которых действующие на материальные точки силы потенциальны и не зависят явно от времени, называют консервативными. Также называют и силы. Потенциальная энергия консервативной системы зависит только от координат точек системы, а полная механическая энергия сохраняется.

няется, если  $\partial U^{ext}/\partial t = 0$ ,  $W^d = 0$  а также если  $\frac{\partial U^{ext}}{\partial t} = -W^d$ , т. е. если убыль энергии за счет диссипативных сил компенсируется поступлением энергии в систему за счет зависящих от времени потенциальных сил.

Для замкнутой системы (в отсутствие также внутренних диссипативных сил) имеем 10 интегралов движения: семь первых ( $E=E_0$ ,  $\vec{P} = \vec{P}_0$ ,  $\vec{L} = \vec{L}_0$ ) и три вторых ( $\vec{R} = \vec{V}t + \vec{R}_0$ ).

#### 5.4. МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ. ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

Рассмотрим движение в поле консервативных сил системы точек, потенциальная энергия которой является однородной функцией координат, т. е. функцией, удовлетворяющей условию

$$U(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, \dots, \alpha\vec{r}_N) = \alpha^\nu U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N),$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная, а число  $\nu$  — степень однородности функции. Запишем уравнения движения

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20.5)$$

и произведем в них преобразование, при котором наряду с изменением всех радиус-векторов в  $\alpha$  раз одновременно изменяется в  $\beta$  раз время:

$$\vec{r}_i \rightarrow \alpha\vec{r}_i, \quad t \rightarrow \beta t. \quad (21.5)$$

Уравнения движения в результате этого преобразования, очевидно, приобретают вид

$$\frac{\alpha}{\beta^2} m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\alpha^{\nu-1} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}. \quad (22.5)$$

Пусть постоянная  $\beta$  связана с  $\alpha$  соотношением

$$\beta = \alpha^{1-\nu/2}. \quad (23.5)$$

Тогда уравнения движения останутся неизменными. Но радиус-векторы всех частиц мы изменили в  $\alpha$  раз, т. е. мы сделали переход к геометрически подобным траекториям, которые отличаются от исходных лишь своими линейными размерами. При этом отношение всех времен движения (между соответствующими точками траекторий) равно

$$t'/t = (l'/l)^{1-\nu/2}. \quad (24.5)$$

Здесь  $l'/l$  — отношение линейных размеров двух траекторий.

Рассмотренный переход возможен только в том случае, когда потенциальная энергия системы является однородной функцией  $\nu$ -й степени от декартовых координат. Соотношения типа (24.5) для времен можно получить также и для любых механических величин в соответственных точках траекторий в соответственные моменты времени. Так, для импульсов получим

$$\frac{p'}{p} = \frac{l'/l}{t'/t} = \frac{l'}{l} \cdot \left(\frac{l'}{l}\right)^{\nu/2-1} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\nu/2}.$$

Из формулы (24.5) нетрудно вывести свойство изохронности колебаний математического маятника ( $\nu = 2$ ) или третий закон Кеплера ( $\nu = -1$ ).

Докажем теперь теорему вириала для системы материальных точек. Обратим внимание на то, что эта теорема имеет статистический характер. Рассмотрим величину  $G = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i)$  и вычислим

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N (\dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \quad (25.5)$$

Преобразуем правую часть (25.5):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = 2T \\ \sum_{i=1}^N (\dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i) &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i) \end{aligned}$$

С учетом этих преобразований имеем

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i) \quad (26.5)$$

Усредним (26.5) по времени согласно формуле

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \quad (27.5)$$

В результате усреднения получим

$$2\bar{T} + \overline{\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i)} = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}.$$

Для периодического движения справа стоит нуль, так как  $\tau$  можно выбрать равным периоду. Аналогично правая сторона обращается в нуль, если координаты и скорость точек системы остаются ограниченными (т. е. не обращаются в бесконечность). Поэтому в любом случае

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i)}. \quad (28.5)$$

Правая часть этого равенства называется вириалом Клаузиуса, а само равенство выражает так называемую теорему вириала В таком виде теорема вириала полезна в кинетической теории газов.

Можно показать, что если в силы  $\vec{F}_i$  будут входить силы трения  $\vec{F}_i^d$ , пропорциональные первым степеням скоростей точек, то вириал системы от них зависеть не будет. При этом, разумеется, нужно предположить, что движение системы не прекращается вследствие трения, т. е. в систему поступает энергия на поддержание движения (в противном случае все средние значения будут стремиться при  $\tau \rightarrow \infty$  к нулю и равенство (28.5) потеряет смысл).

Рассмотрим случай, когда все силы  $\vec{F}_i$  являются потенциальными. Тогда вместо (28.5) получим

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_{i=1}^N \left( \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right)}. \quad (29.5)$$

Если к тому же потенциальная энергия является однородной функцией  $n$ -й степени от всех радиусов-векторов  $\vec{r}_i$ , то согласно теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$\bar{T} = \frac{n}{2} \bar{U}. \quad (30.5).$$

Теорема вириала. *Кинетическая энергия системы материальных точек, усредненная по бесконечному интервалу времени, равна усредненному по тому же интервалу времени вириалу сил.*

Так как  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E_0$ , соотношение (30.5) можно представить в формах, полезных для приложений:

$$\bar{U} = \frac{2}{n+2} E_0, \quad \bar{T} = \frac{n}{n+2} E_0.$$

Из (30.5) следует, что для гармонического осциллятора ( $n = 2$ )  $\bar{T} = \bar{U}$ , для ньютоновского взаимодействия ( $n = -1$ )  $\bar{T} = -\frac{\bar{U}}{2}$  и  $\bar{T} = -E_0$ .

Теорема вириала используется в классической механике, атомной физике и статистической механике. Ее модификация применяется в квантовой механике.

## 5.5. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

Задача двух тел представляет собой наиболее простую задачу системы материальных точек, решить которую можно полностью в общем виде, если сила взаимодействия между частицами подчиняется третьему закону Ньютона. Это точно решаемая задача. Она может быть упрощена путем разложения движения системы (состоящей из двух частиц) на движение центра масс и движение точек относительно ЦСМ.

Запишем уравнения движения относительно неподвижной системы отсчета с началом в точке  $O$ :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{\partial U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\partial \vec{r}_1}, \quad (31.5)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = -\frac{\partial U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)}{\partial \vec{r}_2},$$

причем

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0. \quad (32.5)$$

Так как внешние силы на точки не действуют, то согласно (7.5) имеем закон движения центра масс системы двух точек в виде

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{V}t + \vec{R}_0, \quad (33.5)$$

где  $\vec{V} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_{10} + m_2 \dot{\vec{r}}_{20}}{m_1 + m_2}$  — скорость, а  $\vec{R}_0 = \frac{m_1 \vec{r}_{10} + m_2 \vec{r}_{20}}{m_1 + m_2}$  — радиус-вектор центра масс в начальный момент времени.

Введем систему отсчета  $S'$  с началом  $O'$  в центре масс. Тогда

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i, \quad \dot{\vec{r}}_i = \vec{V} + \dot{\vec{r}}'_i, \quad i = 1, 2, \quad (34.5)$$

где  $\vec{V} = \dot{\vec{R}} \equiv \vec{V}_0$ ,  $\vec{r}'_i$  — радиус-вектор  $i$ -й точки относительно  $S'$ .

Согласно принципу относительности Галилея уравнения движения (31.5) сохраняют свою форму в системе отсчета  $S'$ :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}'_1 &= \vec{F}_{21}(|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}'_2 &= \vec{F}_{12}(|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|). \end{aligned} \quad (35.5)$$

Но в системе  $S'$  радиус-вектор центра масс  $\vec{R}' = 0$ . Значит,

$$m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 = 0 \quad (36.5)$$

Вводя вектор взаимного расстояния

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1, \quad (37.5)$$

из двух последних равенств находим

$$\vec{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (38.5)$$

Дифференцируя (38.5) по времени, получим

$$\dot{\vec{r}}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}. \quad (39.5)$$

И далее

$$\ddot{\vec{r}}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}, \quad \ddot{\vec{r}}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}. \quad (40.5)$$

Подставляя (37.5) и (40.5) в (35.5) и учитывая (38.5), убеждаемся, что уравнения движения для каждой точки записываются одинаково:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -\vec{F}_{21}(|\vec{r}|). \quad (41.5)$$

Величина  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  называется приведенной массой. Заметим, что, используя (38.5), (40.5), можно получить уравнения движения для каждой из точек в виде

$$m_1 \ddot{\vec{r}}'_1 = \vec{F}_{21}\left(\frac{m}{m_2} |\vec{r}'_1|\right), \quad m_2 \ddot{\vec{r}}'_2 = \vec{F}_{12}\left(\frac{m}{m_1} |\vec{r}'_2|\right), \quad m = m_1 + m_2. \quad (42.5)$$

Векторное уравнение движения (41.5) формально совпадает с уравнением движения материальной точки массы  $\mu$ , движущейся во внешнем центральном поле, центр силы которого находится в центре масс. Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных точек сводится к задаче о движении одной (воображаемой) точки массы  $\mu$  в заданном центральном поле. По решению  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  этой задачи законы движения каждой из частиц можно найти в системе  $S'$  по формулам (38.5), а в системе  $S$  по формулам (34.5).

Приведем формулы, описывающие движение  $\mu$ -точки, используя результаты задачи о движении точки в центральном поле. Энергия и момент импульса  $\mu$ -точки:

$$E' = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) = E'_0, \quad \vec{L}' = \mu [\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}] = \vec{L}'_0.$$

Уравнение плоскости, в которой целиком лежит траектория  $\mu$ -точки,  $(\vec{L}'_0 \cdot \vec{r}) = 0$ . Уравнение траектории  $\mu$ -точки в перпендикулярной вектору плоскости:

$$\varphi = \pm \int \frac{L'_0}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E'_0 - U_{\text{эфф}})}} + C_1,$$

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + L_0'^2 / 2\mu r^2.$$

Уравнение, неявно определяющее радиальную координату  $\mu$ -точки  $r$  как функцию времени:

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E'_0 - U_{\text{эфф}})}} + C_2.$$

Резюмируя, можно сказать, что относительно  $S$  центр масс движется равномерно и прямолинейно, а обе точки относительно  $S'$  совершают движение в плоскости, проходящей через центр масс и сохраняющей свою ориентацию относительно  $S$ ; траектории обеих точек относительно  $S'$  подобны, причем центр подобия находится в центре масс, а соотношения подобия равны отношению масс точек.

Нетрудно показать, что  $\vec{L}' = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2$ , а  $E' = E'_1 + E'_2$ , где  $\vec{L}'_i$  - момент импульса,  $E'_i$  — энергия  $i$ -й точки в системе  $S'$ :

$$\vec{L}' = m_1 [\vec{r}'_1 \cdot \dot{\vec{r}}'_1] + m_2 [\vec{r}'_2 \cdot \dot{\vec{r}}'_2] = \mu [\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}],$$

$$E' = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2}{2} + U(r) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r).$$

Итак, механическое состояние системы, состоящей из двух взаимодействующих точек, относительно системы отсчета  $S$  определяется формулами

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_2}{m} \vec{r}(t), \quad \vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_1}{m} \vec{r}(t),$$

$$\dot{\vec{r}}_1(t) = \vec{V}_0(t) - \frac{m_2}{m} \dot{\vec{r}}(t), \quad \dot{\vec{r}}_2(t) = \vec{V}_0(t) + \frac{m_1}{m} \dot{\vec{r}}(t), \quad m = m_1 + m_2.$$

## Глава 6

### УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ

#### 6.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теоретической механике в рамках задачи двух тел решают в основном две задачи: задачу определения значений энергии системы, траекторий частиц, движущихся в ограниченной области пространства, и задачу рассеяния частиц, которая включает в себя исследование упругого рассеяния. Рассеяние двух частиц называют упругим, если в этом процессе не происходит изменения внутреннего состояния взаимодействующих частиц.

Постановка задачи рассеяния состоит в следующем. Прежде всего удобно считать начальным моментом времени  $t_0 = -\infty$ . При этом предполагается, что при  $t = -\infty$  частицы не взаимодействуют между собой (являются свободными), так как они бесконечно далеки друг от друга и вследствие этого энергия их взаимодействия, являющаяся убывающей функцией расстояния между ними, равна нулю. Далее частицы взаимодействуют между собой, однако при  $t \rightarrow \infty$  они **расходятся** на большое расстояние и их энергия взаимодействия снова обращается в нуль.

Задача заключается в том, чтобы определить механическое состояние системы частиц при  $t = \infty$ , задав их состояние при  $t = -\infty$ . В квантовой механике состояния частиц при  $t = -\infty$  называют In-состояниями, а при  $t = \infty$  - Out-состояниями. Удобно придерживаться этой терминологии и в теоретической механике. Легко видеть, что механическое состояние системы, состоящей из двух частиц, при  $t = -\infty$  и  $t = \infty$  определяется их скоростями (или импульсами), поэтому векторы  $\vec{v}_1^- = \vec{v}_1(-\infty), \vec{v}_2^- = \vec{v}_2(-\infty)$  характеризуют In-состояния, а векторы  $\vec{v}_1^+ = \vec{v}_1(\infty), \vec{v}_2^+ = \vec{v}_2(\infty)$  - Out-состояния системы. Кроме того нужно также задать массы частиц  $m_1, m_2$ , энергию их взаимодействия  $U(r)$  и параметр  $\rho$ , называемый прицельным расстоянием.

Скорости частиц задаются относительно некоторой инерциальной системы отсчета, которую в теории рассеяния обычно называют лабораторной системой или  $l$ -системой. Если рассматривается задача о рассеянии двух пучков частиц (в таком случае предполагается, что в одном из пучков все частицы имеют одинаковые массы, скажем  $m_1$ , и скорости  $\vec{v}_1^-$ , а во втором  $m_2$  и  $\vec{v}_2^-$  то, как будет видно из дальнейшего, нужно также задать угол  $\psi$  определяющий ориентацию плоскости движения каждой из пар относительно системы отсчёта, связанной с центром масс какой либо пары (эту систему называют  $\psi$ -системой).

Задачу рассеяния двух частиц можно решать в общем виде, используя полученное



выше решение задачи двух тел. В самом деле, задачу двух тел сведём к задаче о движении  $\mu$ -точки и далее, учитывая сохранение скорости центра масс рассматриваемой системы в процессе рассеяния (вследствие того, что система изолированная), находим

$$\vec{v}_1^+ = \vec{V} - \frac{m_2}{m} \vec{v}^+, \quad \vec{v}_2^+ = \vec{V} + \frac{m_1}{m} \vec{v}^+, \quad m = m_1 + m_2, \quad (1.6)$$

где  $\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1^- + m_2 \vec{v}_2^-}{m}$  - скорость центра масс, а  $\vec{v}^+ = \vec{v}_2^+ - \vec{v}_1^+$  скорость  $\mu$ -точки после рассеяния. Величину  $v^+$  найдем из закона сохранения энергии для  $\mu$ -точки (закон сохранения энергии в задаче двух тел относительно  $\zeta$ -системы):

$$\frac{\mu v^{+2}}{2} + U|_{t=\infty} = \frac{\mu v^{-2}}{2} + U|_{t=-\infty}. \quad (2.6)$$

Но так как  $U|_{t=\infty} = U|_{t=-\infty} = 0$ ,  $v^+ = v^-$ . Поэтому  $\vec{v}^+ = v^- \vec{n}_\theta$ , где  $v^- = |\vec{v}_2^- - \vec{v}_1^-|$ , а единичный вектор  $\vec{n}_\theta$  направлен по  $\vec{v}^+$  или  $\vec{v}_2^+$ .

Процесс рассеяния в  $\zeta$ -системе можно изобразить графически (рис. 1.6) на плоскости  $x'Oy'$ , являющейся плоскостью движения взаимодействующих частиц. Напомним, что если  $m_1 = m_2$  как на рис. 1.6, то согласно (38.5)

$$\vec{r}'_1 = -\vec{r}/2, \quad \vec{r}'_2 = \vec{r}/2,$$

где  $\vec{r}$  - радиус - вектор  $\mu$ -точки.

Так как в  $\zeta$ -системе в любой момент времени  $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$  (и, значит,  $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$  и  $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$ ), то угол между  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  равен углу между  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  и, следовательно, скорости частиц в любой момент  $t$  направлены противоположно. Таким образом, результат упругого рассеяния частиц сводится в  $\zeta$ -системе к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно-противоположными и неизменными по величине. Но так как вектор  $\vec{v}'_2$  параллелен  $\vec{v}^+$ , этот угол равен углу отклонения  $\mu$ -точки.

Обозначим угол отклонения буквой  $\theta$ . Учтём, что полярный угол  $\varphi_0$  выражается через определенный интеграл:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L'_0}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E_0 - U(r) - L_0'^2/2\mu r^2)}}, \quad (3.6)$$

где точка поворота  $r_{\min}$  является корнем уравнения

$$E_0 - U(r) - L_0'^2 / 2\mu r^2 = 0.$$

В подынтегральное выражение (3.6) входят параметры, характеризующие  $\mu$ -точку. Очевидно, что

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \quad (4.6)$$

Мы здесь воспользовались общим свойством симметричности траектории по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру поля точку орбиты. Поэтому обе асимптоты орбиты скажем,  $\mu$ -точки, пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Угол  $\theta$  называют углом рассеяния в системе центра масс; он равен углу между двумя асимптотами к траектории  $\mu$ -точки, а  $\varphi_0$  - угол между асимптотой траектории и аписидальным вектором.

Прицельное расстояние - это расстояние между асимптотами траекторий частиц в  $u$ -системе, по которым частицы движутся до рассеяния. Его также можно определить как минимальное расстояние, на котором частицы пролетели бы друг от друга в отсутствие взаимодействия между ними.

В задаче рассеяния сохраняющиеся величины  $E_0$  и  $L_0'$  принято записывать через скорость  $v^-$  и прицельное расстояние  $\rho$ :

$$E_0 = \frac{\mu v^{-2}}{2}, \quad L_0' = \mu r v^- \sin(\vec{r} \cdot \vec{v}^-) = \mu \rho v^-,$$

так как  $\rho = r \sin(\vec{r} \cdot \vec{v}^-)$ . Отсюда видно, что  $\rho$  равно длине перпендикуляра, опущенного из центра поля на асимптоту траектории  $\mu$ -точки, или, эквивалентно, это минимальное расстояние, на котором  $\mu$ -точка прошла бы от центра если бы взаимодействие между ней и полем отсутствовало бы вообще.

Формулами (1.6), (4.6) дается решение задачи об упругом рассеянии двух частиц. Мы видим, что эта задача является лишь частным случаем задачи двух тел, когда нужно знать лишь скорости частиц после рассеяния при  $t \rightarrow \infty$ . Угол рассеяния  $\theta$  зависит лишь от  $\rho$ ,  $v^-$ , а так же от вида взаимодействия частиц и параметров, которые его характеризуют, т.е. от  $U(\vec{r})$

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2U(r)/(\mu v^-)^2 - \rho^2/r^2}}. \quad (5.6)$$

## 6.2. ДИАГРАММЫ СКОРОСТЕЙ И ИМПУЛЬСОВ

Общим результатам, полученным выше на основании законов сохранения энергии и импульса, можно дать геометрическую интерпретацию, изображая на графике импульсы частиц в  $l$ -системе. Для этого умножим формулы (1.6) на  $m_1$  и  $m_2$  соответственно :

$$\vec{p}_1^+ = \frac{m_1}{m}(\vec{p}_1^- + \vec{p}_2^-) - \bar{\mu}v^- \vec{n}_\theta, \quad (6.6)$$

$$\vec{p}_2^+ = \frac{m_2}{m}(\vec{p}_1^- + \vec{p}_2^-) + \bar{\mu}v^- \vec{n}_\theta. \quad (7.6)$$

Построим окружность радиуса  $\bar{\mu}v^-$  и далее векторы (6.6), (7.6) (рис. 2.6). При заданных  $\vec{p}_1^-$  и  $\vec{p}_2^-$  радиус окружности и положение точек А и В неизменны, а точка С может иметь любое положение на окружности. Рассмотрим случай когда одна из частиц (для определенности массы  $m_1$ ) при  $t = -\infty$  покоится, т.е.  $\vec{v}_1^- = 0$ . В этом случае  $\vec{v}^- = \vec{v}_2^-$ ,  $\vec{AO} = \frac{m_2}{m} \vec{p}_2^-$ ,  $\vec{AB} = \vec{p}_2^-$ ,  $\vec{OB} = \frac{m_1}{m} \vec{p}_2^- = \bar{\mu}v^-$ , и, в зависимости от соотношения масс  $m_1$  и  $m_2$ , получим диаграммы, изображенные на рис. 3.6. Указанные на рис. 3.6. углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , представляют собой углы отклонения (рассеяния) частиц после столкновения по отношению к направлению движения налетающей частицы импульса  $\vec{p}_2^-$  (направление удара).

Углом  $\theta$  задаётся направление вектора  $\vec{n}_\theta$ , и, значит этот угол представляет собой угол поворота частицы массы  $m_2$  в системе центра масс. Из элементарной геометрии находим связи

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \text{tg } \theta_2 = \frac{m_1 \sin \theta}{m_2 + m_1 \cos \theta}. \quad (8.6)$$

Абсолютные величины скоростей обеих частиц как функции  $\theta$  можно найти из формулы

$$v_1^+ = 2 \frac{m_2}{m} v^- \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.6)$$

$$v_2^+ = \frac{v^-}{m} \sqrt{m_2^2 + m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}. \quad (10.6)$$

Суммарный угол

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{arctg} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta + \frac{m_2 - m_1}{m_1}}$$

есть угол разлёта частиц после столкновения. Видно, что  $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$  при  $m_1 > m_2$  и

$\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$  при  $m_2 > m_1$ . Напомним, что  $m_2$  - масса налетающей частицы.

Заметим, что при  $m_1 > m_2$  скорость налетающей частицы после столкновения может иметь любое направление, но если  $m_2 > m_1$ , то угол отклонения первоначально движущейся частицы ограничен значением, соответствующим такому положению точки С, при котором прямая АС касается окружности. При этом

$$\sin \theta_{2\max} = \frac{OC}{AO} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Если  $m_1 = m_2$  и, кроме того  $\vec{v}_1^- = 0$  то диаграмма импульсов становится совсем простой (рис. 4.6). Существенно упрощаются и формулы, выражающие связи  $\theta_1, \theta_2, \vec{v}_1^+, \vec{v}_2^+$  с углом  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi - \theta}{2}, & \theta_2 &= \frac{\theta}{2}, \\ v_1^+ &= v^- \sin \frac{\theta}{2}, & v_2^+ &= v^- \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Очевидно, в этом случае угол разлета

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Рис. 4.6

Рассмотрим теперь случай так называемого лобового удара, когда обе частицы после столкновения движутся по одной прямой:  $\theta = \pi$ ,  $\vec{p}_1^+, \vec{p}_2^+$ , или взаимно противоположны (если  $m_1 > m_2$ ), или направлены в одну сторону (если  $m_2 > m_1$ ). Скорости частиц после столкновения получим прямо из (1.6) в виде

$$\vec{v}_1^+ = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2^-, \quad \vec{v}_2^+ = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2^-. \quad (11.6)$$

Из (11.6) видно, что при лобовом ударе первоначально покоившаяся частица приобретает после столкновения максимально возможную энергию

$$E_1^+ = \frac{m_1 v_1^{+2}}{2} = 4 \frac{m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} E_2^-,$$

где  $E_2^- = \frac{m_1 v_1^{-2}}{2}$  - энергия движущейся до столкновения частицы.

### 6.3. ЭФФЕКТИВНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

Физическая задача о рассеянии заключается в определении характеристик пучка частиц массы  $m_1$ , имеющих до рассеяния одинаковые скорости  $\vec{v}_1^-$ , на пучке частиц массы  $m_2$  скорости которых до рассеяния также одинаковы и равны  $\vec{v}_2^-$ . При этом предполагается, что оба пучка однородны по своим сечениям и что каждый из пучков разрежен настолько, что взаимодействие между частицами внутри самого пучка можно не учитывать. Так как оба пучка являются разреженными, процесс рассеяния каждой частицы одного пучка на частице другого пучка можно считать однократным.

Основные характеристики процесса рассеяния получим в  $\zeta$ -системе для  $\mu$ -точки. Различные пары частиц, т. е. различные  $\mu$ -точки, обладают разными прицельными расстояниями и соответственно им рассеиваются под разными углами (рис. 5.6)

Рис. 5.6

Нетрудно понять, что центры масс всех  $\mu$ -точек покоятся относительно друг друга, поэтому угол  $\theta$  для каждой данной пары взаимодействующих частиц будет одним и тем же относительно системы отсчета с началом в центре масс любой пары. Можно выбрать одну из таких систем отсчета, назвав ее условно  $\zeta$ -системой. Именно относительно такой системы отсчета рассматривается процесс рассеяния.

Точка, имеющая прицельное расстояние  $\rho$ , отклоняется на угол  $\theta$  в  $\zeta$ -системе, а точка (имеются в виду  $\mu$ -точки) с прицельным расстоянием  $\rho + d\rho$  рассеивается на угол  $\theta + d\theta$  (см. рис. 5.6). Соответственно  $\mu$ -точки, прицельные расстояния которых лежат внутри интервала  $\rho, \rho + d\rho$ , рассеиваются на углы от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ .

Обозначим через  $dN$  число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ . Это число будет зависеть от плотности падающего пучка частиц  $n$ , и поэтому оно неудобно для характеристики процесса рассеяния. Введем

$$d\sigma = dN / n, \quad (12.6)$$

где  $n$  - число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка, т. е. плотность потока частиц. Тогда  $d\sigma$  будет иметь размерность площади. Это отношение называют эффективным (дифференциальным) сечением рассеяния. Как видно, оно определяется исключительно видом рассеивающего поля (т. е. видом взаимодействия) и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Если связь между  $\theta$  и  $\rho$  взаимно однозначна (что будет в случае, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния), то в заданный ин-

тервал углов между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  будут рассеиваться лишь те частицы, которые пролетают внутри кольца между окружностями радиусов  $\rho(\theta)$  и  $\rho(\theta) + d\rho(\theta)$ . Тогда  $dN = n2\pi\rho(\theta)d\rho$ , а эффективное сечение рассеяния

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)d\rho(\theta). \quad (13.6)$$

Зависимость эффективного сечения рассеяния от угла рассеяния дается этой же формулой, которую нужно переписать в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\theta. \quad (14.6)$$

В (14.6) входит модуль производной  $\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|$  так как она чаще всего бывает отрицательной (почему?).

Эффективное сечение  $d\sigma$  можно отнести к элементу телесного угла  $d\Omega$ , Телесный угол между конусами с углами растворов  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  есть  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ . Поэтому

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin(\theta)}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|d\Omega. \quad (15.6)$$

Заметим, что значение угла  $\psi$ , фиксирующего плоскость рассеяния какой-нибудь  $\mu$ -точки, изменяется в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Для нахождения эффективных сечений в зависимости от углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в  $l$ -системе надо выразить в формуле (15.6)  $\theta$  через  $\theta_1$  и  $\theta_2$  согласно формулам (8.6). Если  $\rho(\theta)$  - многозначная функция угла  $\theta$ , то, как это видно, следует взять сумму по всем ветвям этой функции. При этом получаются формулы как для сечения рассеяния падающего пучка частиц  $d\sigma(\theta_1)$ , так и для частиц первоначально покоившихся  $d\sigma(\theta_2)$ .

#### 6.4. ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ. ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА

Применим полученные формулы к одному из важных физических примеров - рассеянию электрически заряженных частиц. Положив в (3.6)  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  получим

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha x}{(\mu v^-)^2 \rho} - x^2}}, \quad x = \frac{\rho}{r},$$

здесь  $\mu$  - приведенная масса,  $v^- = |\vec{v}_2^- - \vec{v}_1^-|$  - относительная скорость частиц до рассеяния, а

$x_{\max}$  является положительным корнем уравнения

$$x^2 - \frac{2\alpha x}{\mu v^{-2} \rho} - 1 = 0, \quad x_{\max} = \frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho}\right)^2 + 1}.$$

Вычисляя интеграл, для угла рассеяния в  $\eta$ -системе получаем

$$\theta = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu v^{-2} \rho}. \quad (16.6)$$

В случае сил притяжения ( $\alpha > 0$ ) угол рассеяния отрицательный,  $\theta < 0$  а если взаимодействие носит характер отталкивания ( $\alpha < 0$ ), то  $\theta > 0$ . Обращая формулу (16.6), получим

$$\rho = -\frac{\alpha}{\mu v^{-2}} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (17.6)$$

Дифференцируя это выражение по  $\theta$  и подставляя результат в (13.6) или (15.6), находим

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v^{-2}}\right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

или

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^{-2}}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (18.6)$$

Это формула Резерфорда. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния не зависит от знака  $\alpha$ , так что формулой Резерфорда описывается как случай притяжения, так и случай отталкивания.

В ряде задач теории рассеяния можно ввести понятие полного эффективного сечения рассеяния как величины, равной отношению числа частиц, рассеиваемых за единицу времени под всеми углами  $\theta$ , к плотности потока падающих частиц:

$$\sigma_{tot} = \int_{(\theta)} d\sigma(\theta) = \int_{(\Omega)} d\sigma(\Omega). \quad (19.6)$$

Из этой формулы следует, что если радиус действия сил ограничен, т. е. потенциальная энергия взаимодействия имеет вид  $U(r)$  при  $r < R$ ,  $U(r) = 0$  при  $r > R$ , то  $\sigma_{tot}$  будет равно площади круга радиуса  $R$ :

$$\sigma_{tot} = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2. \quad (20.6)$$

Если ввести полное сечение для процесса рассеяния заряженных частиц, то нетрудно пока-

зять, что оно обращается в бесконечность. Говорят в этом случае, что полное сечение расходится. Эта расходимость связана с существованием взаимодействия между частицами при сколь угодно больших прицельных расстояниях, т. е. фактически она возникает из-за бесконечно большого “радиуса действия” кулоновских сил. Дело в том, что при вычислении  $\sigma_{tot}$  мы учитываем вклад всех рассеянных частиц, включая частицы с прицельным расстоянием  $\rho \rightarrow \infty$  и соответственно  $\theta \rightarrow 0$ . Легко видеть, что при  $\theta \rightarrow 0$  расходится и  $d\sigma$ , так как

$$d\sigma|_{\theta \rightarrow 0} \cong 8\pi \left( \frac{\alpha}{2\mu v^{-2}} \right)^2 \frac{d\theta}{\theta^3} \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

Следует отметить, что эта расходимость присутствует и в формулах  $d\sigma^{KB}|_{\theta \rightarrow 0}$ , полученных методами квантовой теории. Ее причина также связана с дальнедействующим характером кулоновских сил.

## 6.5. ЗАХВАТ ЧАСТИЦ. ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ ЗАХВАТА

Рассмотрим графики эффективных энергий, представленные на рис. 7.6, и поставим вопрос: в чем они существенно различны? Ответ, очевидно, заключается в следующем: на рис. 7.6,а изображен случай, когда для всех (любых) In-состояний существуют Out-состояния, в то время как в случае рис. 7.6,б некоторые In-состояния не имеют Out-состояний. Легко видеть, что частицы, находящиеся при  $t \rightarrow -\infty$  в In-состояниях с энергиями  $E > U_m$  будут падать на центр поля.

Подобно тому как это было сделано для задачи рассеяния, здесь также можно ввести некоторую физическую величину, которой удобно характеризовать процесс. Если речь идет о взаимодействии пучков частиц, то отсутствие Out-состояний в такой задаче, очевидно, означает, что обе частицы при  $t = \infty$  совершают движение в ограниченной области пространства. В таком случае говорят о захвате частиц. Процесс характеризуют полным сечением захвата, которое определяют как отношение числа частиц данного пучка, захваченных за единицу времени, к плотности потока этого пучка до рассеяния. Как и ранее, задача захвата двух частиц приводится к задаче о движении  $\mu$ -точки.

Условия падения на центр поля  $\mu$ -точки запишем, используя параметры задачи рассеяния  $\vec{v}^-$  и  $\rho$ :



$$\frac{\mu v^{-2}}{2} \geq U(r) + \frac{\mu v^{-2} \rho^2}{2 r^2} \quad (21.6)$$

и далее

$$0 \geq r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{\mu v^{-2} \rho^2}{2}. \quad (22.6)$$

Этой формулой и определяются условия падения на центр поля.

Поставим вопрос: при каких значениях  $\rho$  неравенство удовлетворяется? Очевидно, если  $U(r) > 0$ , т. е. если взаимодействие носит характер отталкивания, неравенство не удовлетворяется ни при каких значениях  $\rho$ . В случае же притяжения, по крайней мере, если силы притяжения быстро убывают при  $r \rightarrow 0$ , падение становится возможным хотя бы для некоторых  $\rho$ :  $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$ . Значит, в этом случае при  $\rho < \rho_{\max}$  происходит захват частиц. Полное сечение захвата, согласно данному выше определению, вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}_{tot} = \pi \rho_{\max}^2. \quad (23.6)$$

Рис. 8.6

Пример. Найти полное сечение захвата частиц с энергией  $E_0$  в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$

Эффективная потенциальная энергия  $U_{эфф} = \frac{\alpha}{r} - \frac{\tilde{\beta}}{r^2}$ , где  $\tilde{\beta} = \beta - E_0 \rho^2$ . Падение на центр поля возможно, только если  $\tilde{\beta} > 0$ , т. е. при  $\beta > E_0 \rho^2$ . При этом должно выполняться неравенство  $E_0 > U_m$  где  $U_m = U_{эфф \max}$  (рис. 8.6). Найдем  $U_m$ .  $U'_{эфф} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\tilde{\beta}}{r^3} = 0$ . Отсюда  $r_m = \frac{2\tilde{\beta}}{\alpha} > 0$  и  $U_m = \frac{\alpha}{r_m} - \frac{\beta}{r_m^2} = \frac{\alpha^2}{4\tilde{\beta}}$ .

Из условия  $E_0 > U_m$  получим

$$E_0 > \frac{\alpha^2}{4(\beta - E_0 \rho^2)}, \quad \beta - E_0 \rho^2 > \frac{\alpha^2}{4E_0}$$

и  $\rho^2 < \frac{\beta}{E_0} - \frac{\alpha^2}{4E_0^2}$ . Значит,  $\rho_{\max}^2 = \frac{\beta}{E_0} - \frac{\alpha^2}{4E_0^2}$ . Так как величина  $\rho^2$  должна быть положительной, то окончательно найдем

$$\tilde{\sigma}_{tot} = \pi \left( \frac{\beta}{E_0} - \frac{\alpha^2}{4E_0^2} \right), \quad E_0 > \frac{\alpha^2}{4\beta};$$

$$\tilde{\sigma}_{tot} = 0, \quad E_0 < \frac{\alpha^2}{4\beta}.$$

## Глава 7

### УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

#### 7.1. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛОЖЕННЫХ СВЯЗЯХ

Под связями понимают не вытекающие из уравнений движения ограничения, налагаемые на положения (радиусы-векторы) и скорости точек системы. Связи можно представить себе реализуемыми поверхностями, стержнями, нитями и т. п.; аналитически связи выражаются уравнениями связей, т. е. соотношениями между  $\vec{r}_i$ ,  $\dot{\vec{r}}_i$ . Начальные условия теперь не произвольны, точка не свободна, так как в произвольный момент времени должны выполняться соотношения

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (1.7)$$

Это голономные связи. Функционально они зависят только от координат и времени. Точнее, если все уравнения связей можно представить в виде (1.7) до интегрирования уравнений движения, т. е. если можно проинтегрировать уравнения связей (которые, как было сказано выше, могут зависеть от скоростей) независимо от уравнений движения, то связи называются голономными. Если уравнения связей проинтегрировать нельзя, так что в них остаются скорости, то связи называют неголономными.

Различают связи, когда ни в одно из соотношений (1.7) время явно не входит (стационарные, или склерономные) и когда (1.7) явно зависят от времени (нестационарные, или реономные связи). Силы, с которыми тела, осуществляющие связи действуют на точки механической системы, называют реакциями связей.

Связи вносят в задачи механики две трудности. Во-первых, не все  $\vec{r}_i$  являются независимыми, так как они связаны определёнными соотношениями. Следовательно, не все уравнения движения являются независимыми. Во-вторых, силы, возникающие в результате действия связей (силы реакции связей), априори не заданы. Они являются неизвестными величинами решаемой задачи и подлежат определению. Наложить на систему связи - это значит просто указать, что в системе действуют силы, которые прямо не заданы, но которые определённым образом влияют на движение системы.

Основная задача механики системы  $N$  точек, на которую наложены голономные связи, формулируется как задача нахождения законов движения точек системы и реакций связей по заданным силам  $\vec{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) и заданным уравнениям голономных связей. Если задано  $k$  соотношение вида (1.7), то она сводится к нахождению совместного решения уравнений движения и уравнений связей:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

с начальными условиями, заданными в соответствии с уравнениями связей. Это система  $3N + k$  скалярных уравнений, содержащих  $6N$  неизвестных функций ( $3N$  функций  $\vec{r}_i$  и  $3N$  функций  $\vec{R}_i$ ). В тривиальном случае  $k = 3N$  связи полностью определяют движение системы. Если  $k < 3N$ , то рассматриваемая задача является определенной только в том случае, когда известно  $6N - (3N + k) = 3N - k = s$  независимых соотношений между положениями точек и реакциями связей.

## 7.2. ВИРТУАЛЬНЫЕ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Виртуальным перемещением системы называют бесконечно малое изменение ее конфигурации, согласующееся со связями (наложенными на нее) в данный момент времени. Иными словами, если

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (2.7)$$

то и

$$f_\alpha(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (3.7)$$

т. е. уравнения (2.7), (3.7) должны удовлетворяться в один и тот же момент времени. Виртуальные перемещения являются геометрическими понятиями, не связанными с движением. Это вариации функций  $\delta\vec{r}_i(t)$  при неизменном значении аргумента, т. е. малые изменения вида функций. Это не перемещения точек системы во времени, а элементарные отрезки, которые по определению должны удовлетворять уравнениям связей в тот же момент времени  $t$  что и  $\vec{r}_i(t)$ .

Раскладывая  $f_\alpha$  из (3.7) и ограничиваясь линейными членами, получим

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i(t) \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (4.7)$$

или, так как  $f_\alpha$  удовлетворяют (2.7),

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i(t) \right) \equiv \sum_{i=1}^N (\nabla_i f_\alpha \delta\vec{r}_i) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (5.7)$$

Так как число уравнений  $k < 3N$ , то в выборе  $\delta\vec{r}_i$  имеется произвол. Из общего чис-

ла после удовлетворения условий (5.7) произвольными останутся  $s = 3N - k$ .

Действительным перемещением  $i$ -ой точки  $d\vec{r}_i$  называют бесконечно малое перемещение этой точки, происходящее под действием как заданных сил  $\vec{F}_i$  так и сил реакций связей<sup>1</sup>; оно происходит за время  $dt$ .

Можно также ввести понятие возможных перемещений, удовлетворяющих только уравнениям связей. Действительные перемещения как одни из возможных удовлетворяют уравнениям

$$f_\alpha(\vec{r}_1 + d\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + d\vec{r}_N, t + dt) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k,$$

или

$$\sum_{i=1}^N (\nabla_i f_\alpha \delta \vec{r}_i) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (6.7)$$

К классу виртуальных возможные перемещения относятся только тогда, когда связи стационарны.

Понятие о виртуальных перемещениях позволяет ввести важный класс связей, называемых идеальными. Пусть сумма работ всех реакций связей на любых виртуальных перемещениях точек системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = 0. \quad (7.7)$$

Связи, удовлетворяющие этому условию, называют идеальными. В дальнейшем мы будем рассматривать только те системы на которые наложены идеальные связи.

### 7.3. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ ОБРАТИМЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ПРИНЦИП Д'АЛАЛМБЕРА. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ МЕХАНИКИ

Принципом или началом; механики называют такое общее математически формулируемое предложение, из которого механика как физическая теория может быть выведена дедуктивно (т. е. идя от общего положения к частному), т. е. могут быть получены уравнения движения для механических систем общего типа или для систем некоторого ограниченного класса. Эти принципы используют понятие виртуальных перемещений, т. е. по существу понятие вариации функции. Они формулируют условия существования обобщенного состояния равновесия некоторых систем, которое в свою очередь находится как решение задачи на экстремум некоторой функции.

Рассмотрим несвободную систему материальных точек в равновесии. Тогда  $\vec{\Phi}_i = 0$ ,

где  $\vec{\Phi}_i = \vec{R}_i + \vec{F}_i$ . Вычислим  $\sum_{i=1}^N (\vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i)$ , получаем  $\sum_{i=1}^N (\vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0$ . Полученное равенство тривиально. Чтобы наполнить его новым физическим содержанием, представим его в виде

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0,$$

если связи идеальны, т. е. если  $\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0$  то и

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0.$$

Виртуальная работа активных (внешних) сил, приложенных к уравновешенной системе, равна нулю. Это принцип виртуальных работ (перемещений). Он эквивалентен постулату: *Виртуальная работа сил реакции всегда равна нулю на любом виртуальном перемещении, не нарушающем заданных кинематических условий:*

$$0 = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = - \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i).$$

Заметим, что  $\vec{F}_i \neq 0$ , так как не все  $\delta\vec{r}_i$  независимы. Чтобы приравнять коэффициенты нулю, нужно перейти к независимым вариациям координат.

Принцип виртуальных перемещений был обобщен Д'Аламбером на динамические системы. Все другие основные принципы механики (Эйлера, Лагранжа, Якоби, Гамильтона-Остроградского) являются, по-видимому, различными математическими формулировками принципа Д'Аламбера. Поэтому в некотором смысле постулат о виртуальной работе сил реакций есть по существу единственный постулат аналитической механики.

Включим  $m_i \ddot{\vec{r}}_i$  в  $\vec{\Phi}_i$  и далее применим принцип виртуальных перемещений к “механической системе”, на которую действуют силы  $\vec{\Phi}_i$ . Тогда получим

$$0 = \sum_{i=1}^N ((m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i) = 0 \quad (8.7)$$

Это (соотношение называют принципом Д'Аламбера, а так же общим уравнением механики Д'Аламбера - Лагранжа).

Из общего уравнения механики получаются как уравнения с неопределенными множителями (1-го рода), так и Лагранжа в независимых (обобщенных) координатах (2-го рода).

---

<sup>1</sup> Заданные силы  $\vec{F}_i$ , часто называют активными силами; силы же реакции связей  $\vec{R}_i$  называют пассивными силами.

## 7.4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 1-ГО РОДА

Умножим каждое из соотношений (5.7) на некоторый множитель  $-\lambda_\alpha(t)$  и сложим их

$$-\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \sum_{i=1}^N (\vec{\nabla}_i f_\alpha \delta \vec{r}_i) = -\sum_{i=1}^N \left( \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha (\vec{\nabla}_i f_\alpha \delta \vec{r}_i) \right) = 0 \quad (9.7)$$

Складывая (9.7) и общее уравнение механики, получим

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_i \right\} = 0. \quad (10.7)$$

Мы должны получить уравнения движения. Для этого подберём  $k$  ещё не определенных множителей  $\lambda_\alpha$  так, чтобы коэффициенты при  $k$  зависимых вариациях  $\delta \vec{r}_i$  обратились бы в нуль. Это можно сделать единственным образом (т. е. выразить  $k$  зависимых вариаций через  $3N - k$  независимых вариаций), так как мы предполагаем независимость уравнений связей и вытекающее из этого неравенство нулю детерминанта из коэффициентов при зависимых вариациях в соотношениях (5.7). Коэффициенты при независимых вариациях в (10.7) должны быть равны нулю вследствие независимости этих вариаций. Следовательно, чтобы соотношение (10.7) удовлетворялось, необходимо положить коэффициенты при всех  $\delta \vec{r}_i$  равными нулю:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.7)$$

Кроме этого мы имеем еще  $k$  уравнений

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (12.7)$$

Уравнения (11.7) называют уравнениями Лагранжа 1-го рода. Силы реакции связей, как видно из сравнения (7.7) с (9.7) выражаются через градиенты функций  $f_\alpha$

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha. \quad (13.7)$$

Можно сказать, что уравнения (9.7) представляют собой необходимые и достаточные условия обращения в нуль виртуальной работы сил реакций, т. е. условие идеальности связей здесь использовано. По существу к (8.7) мы прибавили нуль, так как виртуальные перемещения удовлетворяют соотношениям (5.7).

Законы изменения полных импульса, момента импульса и механической энергии не-

свободной системы материальных точек модифицируются, так как в правых частях соответствующих уравнений теперь нужно учитывать внешние силы реакции. Это нетрудно сделать, и в итоге мы получим

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} + \vec{R}^{ext}, \quad (14.7)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} + \vec{M}_R^{ext}, \quad (15.7)$$

$$\dot{E} = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^d \cdot \dot{\vec{r}}_i) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}, \quad (16.7)$$

где  $\vec{R}^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{ext}$ ,  $\vec{M}_R^{ext} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{R}_i^{ext}]$ , и при выводе (16.7) мы использовали (6.7), из которого следует, что

$$\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{ext} \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) = - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}.$$

Заметим, что полная механическая энергия несвободной системы сохраняется лишь при условии стационарности внешних потенциальных сил, отсутствии диссипативных сил и стационарности всех связей. Нестационарные связи способны совершать работу, в результате которой механическая энергия системы будет изменяться со временем.

Модифицированные таким образом законы изменения, включают, однако, силы реакции связей, которые остаются неизвестными до решения системы динамических уравнений, и поэтому они неприменимы для определения первых интегралов динамической системы. С этих позиций представляется целесообразным сформулировать законы изменения основных динамических величин так, чтобы неизвестные силы реакций не входили в уравнения.

## 7.5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

### **Теорема об изменении импульса системы с идеальными голономными связями.**

*Если в системе материальных точек с голономными идеальными связями эти связи допускают перемещение системы как целого вдоль некоторого направления, характеризуемого в выбранной инерциальной системе неподвижным вектором, то скорость изменения импульса системы точек вдоль этого вектора равна сумме всех внешних активных сил, действующих в рассматриваемом направлении.*

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  точек  $m_1, m_2, \dots, m_N$  с наложенными на нее голономными идеальными связями, определяемыми системой уравнений

$$f_{\alpha}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \text{ где } \alpha = 1, 2, \dots, k < 3N.$$

Уравнения Ньютона, которым подчиняется система, имеют вид



$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{ext} + \vec{R}_i, \quad (17.7)$$

где  $\vec{F}_{ji}$  — силы, действующие со стороны  $j$ -и точки системы на  $i$ -ю точку (внутренние силы),  $\vec{F}_i^{ext}$  — внешние силы, действующие на  $i$ -ю точку со стороны тел, не включенных в систему. Движение внешних тел считается заданным, поэтому внешние силы зависят только от координат и скоростей точек системы и времени, и не содержат координат и скоростей внешних тел.  $\vec{R}_i$  — силы реакции, действующие на  $i$ -ю точку со стороны связей. Поскольку реакции связей не определены до решения задачи, силы  $\vec{R}_i$  являются неизвестными и должны быть исключены. Воспользуемся для этого условием идеальности (7.7).

Пусть  $\delta\vec{r}_i$  — виртуальное перемещение, удовлетворяющее уравнениям связей

$$(\vec{\nabla}_i f_s \cdot \delta\vec{r}_i) = 0.$$

Для систем с идеальными связями виртуальная работа всех сил реакции равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0.$$

Учитывая это условие, умножим скалярно каждое уравнение системы на  $\delta\vec{r}_i$  и сложим все уравнения:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = \sum_{i \neq j=1}^N (\vec{F}_{ji} \cdot \delta\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ext} \cdot \delta\vec{r}_i).$$

Если связи допускают виртуальное перемещение системы как целого, т. е. среди всех виртуальных перемещений существуют такие, что  $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}$ , для всех точек системы, то, вынося общий множитель  $\delta\vec{r}$  за знак суммирования, получим уравнение

$$\left( \delta\vec{r} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}} \right) = \left( \delta\vec{r} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \right),$$

так как в силу третьего закона Ньютона

$$\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0.$$

Введем единичный вектор  $\vec{n}$ , определяющий в пространстве направление смещения системы:

$$\delta\vec{r} = \vec{n} \delta r,$$

такой, что  $\dot{\vec{n}} \neq 0$ . Скорость изменения проекции импульса системы на это направление равна проекции активных внешних сил на это направление:

$$\dot{P}_n = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{n},$$

где введены обозначения

$$P_n = \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{n}), \quad F_n^{ext} = \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{n} \right).$$

Теорема позволяет найти закон движения центра масс  $\vec{R} = \vec{R}(t)$  вдоль направления, задаваемого вектором  $\vec{n}$  из уравнения, если поле однородно или точки приложения внешних сил заданы

$$M\ddot{R}_n = \sum_i F_{in}^{ext}.$$

Аналогичным образом можно сформулировать и теорему об изменении кинетического момента для систем с идеальными связями, исключая неизвестные силы реакции связей.

**Теорема об изменении кинетического момента системы с идеальными голономными связями.**

*Если в системе материальных точек с голономными идеальными связями эти связи допускают поворот системы как целого вдоль некоторого направления, определяемого вектором, неподвижным в данной инерциальной системе, то скорость изменения кинетического момента системы вдоль этого направления равна сумме моментов всех внешних активных сил, действующих в данном направлении.*

Пусть уравнения движения каждой точки системы имеют вид (17.7), а связи допускают поворот системы точек как целого, т. е. виртуальные перемещения каждой точки представимы в виде

$$\delta\vec{r}_i = [\delta\bar{\varphi} \cdot \vec{r}_i].$$

Умножая скалярно каждое уравнение на  $\delta\vec{r}_i$  и складывая, получим уравнение

$$\left( \delta\bar{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot m_i \ddot{\vec{r}}_i] \right) = \left( \delta\bar{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij}] \right) + \left( \delta\bar{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i^{ext}] \right).$$

Здесь мы вновь учли, что для идеальных связей виртуальная работа равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i) = 0.$$

Поскольку внутренние силы, действующие между каждой парой точек системы, согласно третьему закону Ньютона равны по величине, направлены противоположно и лежат на прямой, соединяющей эти точки, их суммарный момент равен нулю:

$$\sum_{i \neq j} [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij}] = 0.$$

Если существует такое направление в пространстве, определяемое вектором  $\vec{n}$ , что  $\delta\bar{\varphi} = \vec{n}\delta\varphi$ , причем  $\dot{\vec{n}} = 0$ , то, вводя обозначения для кинетического момента системы точек

$\vec{L} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{r}}_i]$ , а для суммарного момента внешних сил  $\vec{M} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ext}]$ , придем к теореме об

изменении проекции кинетического момента системы на направление, определяемое вектором  $\vec{n}$ :

$$\dot{L}_n = M_n. \quad (20.7)$$

Если связи допускают поворот системы точек как целого вокруг трех различных фиксированных осей (например, для твердого тела с одной неподвижной точкой), то теореме об изменении вектора кинетического момента можно придать векторную форму:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}. \quad (21.7)$$

Рассмотрим, наконец, теорему об изменении энергии системы материальных точек с идеальными голономными связями.

**Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными голономными связями.**

*Если в системе с голономными идеальными связями связи являются стационарными, т. е. уравнения связей явно не зависят от времени, то скорость изменения кинетической энергии системы равна мощности всех активных сил, внутренних и внешних, действующих на точки системы.*

Предположим, что в рассматриваемой системе связи явно не зависят от времени, так что виртуальные перемещения могут быть выбраны совпадающими с действительными:

$$\delta \vec{r}_i = d\vec{r}_i.$$

В этом случае изменение кинетической энергии системы равно мощности всех активных сил, внешних и внутренних.

Если в системе действуют потенциальные, гироскопические и диссипативные силы, так что

$$\vec{F}_i^p = -\vec{\nabla}_i U, \quad \vec{F}_i^g = [\vec{r}_i \cdot \vec{B}(\vec{r}_i, t)],$$

то, вводя полную энергию системы  $E=T+U$ , получим теорему об изменении полной энергии системы точек с идеальными голономными связями:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{\partial U}{\partial t} + W^d$$

где  $W^d = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^d \cdot \dot{\vec{r}}_i)$  — мощность диссипативных сил. Эта формула является частным случаем формулы (16.7).

## 7.5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В НЕЗАВИСИМЫХ КООРДИНАТАХ (2-ГО РОДА)

Для получения уравнений Лагранжа 2-го рода нужно переписать принцип Д'Аламбера в независимых (или, как их чаще называют, обобщённых) координатах. Выбор этих координат неоднозначен, однако при любом выборе следует удовлетворить двум условиям. Подберем  $s$  обобщённых координат  $q_j$  так, чтобы все  $\vec{r}_i$  были бы однозначными функциями этих координат  $q_1, q_2, \dots, q_s$ :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (17.7)$$

Число независимых координат  $s = 3N - k$  для систем, на которые наложены голономные связи, называют числом степеней свободы системы. Итак, независимыми (обобщёнными) координатами могут быть  $s$  величин, которыми конфигурация системы определяется однозначно. Обозначим декартовы координаты материальных точек системы  $x_i, y_i, z_i$  буквой  $x_i$  и перенумеруем их в определенном порядке. Тогда условие независимости  $q_j$  означает, что из  $3N$  функций  $x_i$   $s$  функций должны быть независимыми, что можно обес-

печить требованием

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_s}{\partial q_1} & \frac{\partial x_s}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (18.7)$$

Второе условие накладывается на связи: при подстановке (17.7) в уравнения связей (1.7) они должны обращаться в тождества

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \Big|_{\substack{\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, \dots, q_s, t) \\ \vdots \\ \vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, \dots, q_s, t)}} \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (19.7)$$

Мы увидим, что в динамические уравнения, записанные в независимых координатах, силы реакции связей вообще не входят; по существу они исключены из динамики системы условиями (7.7).

Теперь мы можем записать принцип Д'Аламбера в независимых координатах. Для этого получим связи между вариациями  $\delta \vec{r}_i$  и  $\delta q_j$ , исходя из (24.7):

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (20.7)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (21.7)$$

и также

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (22.7)$$

Полные производные по времени от обобщенных координат  $q_j$  называются обобщенными скоростями. Подставим (27.7) в (8.7) и преобразуем результат:

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) \delta q_j = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0. \quad (23.7)$$

Под знаком производной  $\frac{d}{dt}$  заменим  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  на  $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$  и введем кинетическую энергию

системы точек как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_i^2 \Big|_{\substack{\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \\ \dot{\vec{r}}_N = \dot{\vec{r}}_N(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)}} \equiv T((q), (\dot{q}), t), \quad (24.7)$$

а также обобщённые силы

$$Q_j(q) = \sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (25.7)$$

С учётом (24.7) и (25.7) принцип Д'Аламбера можно записать в следующем виде

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (26.7)$$

Подчеркнем, что размерность обобщенной силы есть энергия, делённая на обобщенную координату, поэтому ее размерность не совпадает в общем случае с размерностью обычной силы. Совпадут они лишь в случае, если  $q_j$  имеет размерность длины. Размерность суммы  $\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i)$  есть размерность работы или энергии.

Выражение (26.7) представляет собой принцип Д'Аламбера в независимых координатах. В случае голономных связей все  $\delta q_j$  являются независимыми, и для удовлетворения (26.7) мы должны положить коэффициенты при каждой вариации  $\delta q_j$  равными нулю:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (27.7)$$

Уравнениями (27.7) описывается динамика механической системы в независимых координатах под действием заданных внешних сил; силы реакции в (27.7) не входят. Незвестными в этих уравнениях являются обобщенные координаты как функции времени. Число неизвестных и число уравнений совпадают и в данном случае, равны числу степеней свободы. Если внешние силы имеют потенциал  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ , то

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \quad Q_j = -\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial U((\vec{r}))}{\partial q_j} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}((q), t)}, \quad (28.7)$$

причем  $Q_j(q_1, \dots, q_s)$  не зависят от обобщенных скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ .

Введем функцию<sup>2</sup>

$$L((q), (\dot{q}), t) = T((q), (\dot{q}), t) - U((q)), \quad (29.7)$$

<sup>2</sup> Буква, взятая в круглые скобки, обозначает всю совокупность соответствующих переменных, например  $(q) = q_1, q_2, \dots, q_s$ . Иногда с целью упрощения записи, там, где это понятно, круглые скобки не ставятся.

которая называется функцией Лагранжа, или лагранжианом системы. Учитывая, что  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots, s$  (27.7) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (30.7)$$

Уравнения (30.7) называют уравнениями Лагранжа в независимых координатах (2-го рода).

Замечательно, что вся динамика системы материальных точек управляется одной скалярной функцией, зависящей от обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени, - функцией Лагранжа. В общем случае уравнения Лагранжа (27.7) подставляют собой систему  $s$  дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Решение основной задачи динамики несвободной системы может быть проведено следующим образом. Решая систему уравнений Лагранжа, получим

$$q_j = q_j(t, C_1, \dots, C_{2s}), \quad j = 1, \dots, s. \quad (31.7)$$

Далее, если нам нужно знать положения точек в любой момент времени  $t$ , необходимо подставить (31.7) в (17.7). В результате находим

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_1, \dots, q_s), \quad i = 1, \dots, N. \quad (39.7)$$

Силы реакции связей можно определить из уравнений

$$\vec{R}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i. \quad (40.7)$$

При этом  $\ddot{\vec{r}}_i$  находятся из (39.7) путем **двукратного** дифференцирования по времени. Таким образом, основная задача механики полностью решается.

Заметим, что если рассматривать радиус-вектор точки  $\vec{r}$  как функцию трех независимых вещественных переменных  $q_1, q_2, q_3$  в отсутствие связей, то точечные преобразования

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3), \quad x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

описывают переход к произвольным криволинейным координатам  $q_1, q_2, q_3$ . Из (30.7), (33.7) видно, что проекции ускорения материальной точки на единичные орты криволинейных координат  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  можно записать в виде

$$\omega_j = \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{r}^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \dot{r}^2}{\partial q_j} \right\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $\dot{\vec{r}}$  как функция  $q_j, \dot{q}_j$  определяется формулой (28.7) с  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$  а  $h_j = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right|$  являются

функциями криволинейных координат  $h_j = h_j(q_1, q_2, q_3)$ . Единичные векторы определяются как

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}.$$

Параметры  $h_j(q_1, q_2, q_3)$  называются дифференциальными параметрами Ламе.

Метод Лагранжа можно применять и при описании динамики свободной механической системы. Зачастую, особенно при использовании криволинейных координат, уравнения движения системы проще получить методом Лагранжа, чем проектировать векторные уравнения Ньютона на соответствующие орты. В качестве примера получим уравнения движения материальной точки массы,  $m$  в поле силы  $\vec{F}(r)$  в сферической системе координат.

Кинетическую энергию точки найдем, учитывая, что приращение радиуса-вектора точки описывается формулой

$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{n}_r + r d\theta \cdot \vec{n}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \vec{n}_\varphi,$$

а скорость –

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{n}_r + r \dot{\theta} \cdot \vec{n}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \cdot \vec{n}_\varphi,$$

где  $\vec{n}_r, \vec{n}_\theta, \vec{n}_\varphi$  - единичные сферические орты. Поэтому

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

и кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Обобщенные силы

$$Q_r = \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right) = (\vec{F} \cdot \vec{n}_r) = F_r, \quad Q_\theta = \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) = r (\vec{F} \cdot \vec{n}_\theta) = r F_\theta,$$

$$Q_\varphi = \left( \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right) = r \sin \theta F_\varphi.$$

Подставляя  $T$  и  $Q$  в уравнения (27.7) и полагая в них  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$ , получим уравнения движения точки в сферических координатах:

$$m \left\{ \ddot{r} - r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right\} = F_r,$$

$$m \left\{ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right\} = r F_{\theta},$$

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = r \sin \theta F_{\phi}.$$

Проекция ускорения точки на орты сферической системы координат

$$w_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta),$$

$$w_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2,$$

$$w_{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}).$$

Приведем также функцию Лагранжа свободной материальной точки в отсутствие внешних сил в декартовых  $(x, y, z)$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

и в цилиндрических  $(\rho, \phi, z)$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

координатах.

Пример. *Задача о движении двух тел в однородном внешнем поле.* Показать, что задача о движении двух взаимодействующих (по 3-му закону Ньютона) между собой тел в однородном внешнем потенциальном поле сводится к задаче о движении центра масс и задаче о движении  $\mu$ -точки в заданном поле.

В качестве обобщенных координат выберем координаты радиусов-векторов  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  частиц массы  $m_1$  и  $m_2$ . Пусть внешнее поле действует на частицу  $m_2$  с силой  $\vec{F}_1$ , на частицу массы  $m_2$  - с силой  $\vec{F}_2$  (причем по условию  $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ ), а потенциальная энергия взаимодействия частиц равна  $U(r)$ , где  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

Функция Лагранжа в координатах  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(r) + (\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1) + (\vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2)$$

Перейдем к независимым координатам

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$



Тогда

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \vec{R} + \frac{(\vec{F}_2 m_1 - \vec{F}_1 m_2) \vec{r}}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Уравнения Лагранжа в координатах  $\vec{R}$  и  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}, & (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, & \mu \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \mu \left( \frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}_2}{m_2} \right). \end{aligned}$$

В частности, если частицы обладают зарядами  $e_1, e_2$ , а напряженность внешнего поля равна

$\vec{\varepsilon}$ , то  $\vec{F}_1 = e_1 \vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{F}_2 = e_2 \vec{\varepsilon}$ ,  $U(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$ , если исследуется движение двух гравитирующих

частиц в однородном поле тяжести напряженности  $\vec{g}$ , то  $\vec{F}_1 = m_1 \vec{g}$ ,  $\vec{F}_2 = m_2 \vec{g}$ ,

$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ , где  $G$  - гравитационная постоянная.

Из полученных результатов видно, что при движении точек в однородном внешнем потенциальном поле внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс системы. Это достаточно общий результат.

## 7.7. СТРУКТУРА ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА.

### ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим структурную зависимость функции Лагранжа от обобщенных скоростей и поставим вопрос: какой наиболее общий вид потенциала как функции обобщенных скоростей может быть, чтобы уравнения движения механической системы имели бы форму (37.7)? Начнем тем не менее с установления структуры кинетической энергии. Подставляя (28.7) в (31.7), получим

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left( \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + T^{(0)}, \end{aligned} \quad (34.7)$$

где

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (35.7)$$

Мы видим, что

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \quad (36.7)$$

где

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (37.7)$$

- однородная квадратичная форма обобщенных скоростей,

$$T^{(1)} = \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j \quad (38.7)$$

- однородная линейная форма обобщенных скоростей, а

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (39.7)$$

вообще не зависит от обобщенных скоростей.

В целом  $T$  является неоднородной формой обобщенных скоростей, и лишь в случае, когда все  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ , т.е. когда связи стационарны,  $T = T^{(2)}$  и кинетическая энергия становится однородной квадратичной формой обобщенных скоростей. Отметим, что коэффициенты  $a_{jk}$  симметричны  $a_{jk} = a_{kj}$  и что  $T^{(2)} \geq 0$ , т.е.  $T^{(2)}$  - положительно определенная форма обобщенных скоростей.

Рассмотрим теперь структуру потенциала. До сих пор мы исследовали системы с потенциалами, зависящими только от координат (в том числе и обобщенных). Примеры из классической динамики заряженных частиц в электромагнитном поле общего вида приводят нас к понятию обобщенного потенциала, производные которого определенным образом связаны с соответствующими обобщенно-потенциальными силами. Проиллюстрируем это на примере силы Лоренца.

В электродинамике вводят понятие обобщенного потенциала в виде

$$U = -\frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) + e\Phi. \quad (40.7)$$

Здесь  $\vec{A}$  и  $\Phi$  - векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, заданные как функции точки пространства и времени и определяющие напряженности поля:

$$\vec{\varepsilon} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = [\vec{\nabla}\vec{A}], \quad (41.7)$$

где  $e$  - заряд частицы,  $c$  - скорость света. Используя (40.7), силу Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\vec{H}] \quad (42.7)$$

можно представить как

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) \equiv -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\right). \quad (43.7)$$

Действительно, подставляя (40.7) в (43.7) получим

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \\ &= -e\vec{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) - \frac{e}{c}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\vec{H}]. \end{aligned} \quad (44.7)$$

Здесь мы использовали известную из векторного анализа формулу

$$\vec{\nabla}(\vec{C}\cdot\vec{a}) = (\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{C}[\vec{\nabla}\vec{a}]],$$

где  $\vec{C} \equiv \dot{\vec{r}}(t)$  - постоянный (т. е. не зависящий от координат) вектор,  $\vec{a} \equiv \vec{A}(r, t)$ . Заметим, что в качестве обобщенных координат, в частности, можно использовать и декартовы координаты; тогда обобщенными скоростями будут, очевидно, компоненты вектора скорости  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . В общем случае сила (43.7) может быть построена как обобщенная сила

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (45.7)$$

Докажем, что это так. По определению обобщенной силы имеем

$$Q_j = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}. \quad (46.7)$$

Используя соотношение  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j}$ , приведем (46.7) к виду

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_j}\right),$$

убеждаемся, что  $Q_j$  действительно определяется формулой (45.7).

Следует подчеркнуть, что обобщенный потенциал, с помощью которого определяют силы вида (45.7), должен быть линейной формой относительно обобщенных скоростей (т. е.

в  $U$  недопустимы степени  $\dot{q}$  выше первой), так как в противном случае обобщенные силы зависели бы от обобщенных ускорений и задача динамики стала бы неопределенной. Следовательно, в общем случае обобщенный потенциал имеет вид

$$U = U^{(1)} + U^{(0)}, \quad (47.7)$$

где  $U^{(1)} = \sum_{j=1}^s U_j((q), t) \dot{q}_j$  - линейная однородная форма обобщенных скоростей,  $U^{(0)}((q), t)$

-форма нулевой степени. Легко получить структуру обобщенной силы:

$$Q_j = -\frac{\partial U^{(0)}}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k, \quad (48.7)$$

где  $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}$  - коэффициенты, антисимметричные по индексам  $j, k$ , так что

$$\sum_{j,k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 0. \quad (49.7)$$

Последний член в (48.7) представляет так называемую гироскопическую часть обобщенной силы. Таким образом, при наличии обобщенно-потенциальных сил функция Лагранжа представима в виде

$$L = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U^{(1)} - U^{(0)}. \quad (50.7)$$

Приведем здесь также выражение для полной механической энергии несвободной системы материальных точек:

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U^{(0)}. \quad (51.7)$$

Обратим внимание на то, что, по определению,  $E$  есть сумма кинетической и потенциальной энергий системы точек.

## 7.8. ОБОБЩЕННЫЙ ИМПУЛЬС, ОБОБЩЕННАЯ ЭНЕРГИЯ

При наличии обобщенно-потенциальных и диссипативных сил уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (52.7)$$

где  $Q_j^d$  - обобщенно - диссипативные силы.

Рассмотрим систему из  $N$  точек, находящуюся в поле потенциальных сил. Функцию Лагранжа этой системы запишем, выбирая в качестве обобщенных координат декартовы

координаты

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i=1}^N U_i^{(0)}(x, y, z).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j = p_{x_j} \text{ и т. д.}$$

Здесь  $p_{x_j}, p_{y_j}, p_{z_j}$  —  $x$ -,  $y$ -,  $z$ - компоненты импульса  $j$ -й частицы соответственно. Основываясь на этих соотношениях, можно ввести понятие обобщенного импульса как величины, равной  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ . Каждой обобщенной координате  $q_j$  соответствует обобщенный импульс

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ ;  $p_j$  также называют каноническим импульсом. Запишем (52.7) в форме

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^d. \quad (53.7)$$

Из (53.7) следует

*Теорема. Если от какой-либо обобщенной координаты  $q_k$  функция Лагранжа механической системы не зависит, а обобщенная сила  $Q_k^d = 0$ , то обобщенный импульс  $p_k$  является интегралом движения (т. е. сохраняется). Координата  $q_k$  в этом случае называется циклической.*

Доказательство теоремы тривиально. В самом деле, если условия теоремы выполнены, то

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \text{ и } p_k(t) = p_k(t_0).$$

Обобщенный импульс является, очевидно, линейной неоднородной формой обобщенных скоростей. Действительно,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j - U_j.$$

Динамические уравнения (52.7) позволяют ввести понятие ещё одной важной физической величины - обобщенную энергию механической системы. Умножим обе части каждого из уравнений (52.7) на соответствующую скорость  $\dot{q}_j$  и после этого сложим все уравнения:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right\} = \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (54.7)$$

Представим  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j$  в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

и подставим результат в (54.7)

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right\} = \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (55.7)$$

Далее, используя

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right),$$

запишем (62.7) в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right\} = - \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (56.7)$$

Функция

$$H((q), (\dot{q}), t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (57.7)$$

является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и, вообще говоря, времени. Она называется обобщенной энергией механической системы. Из (56.7) следует

*Теорема. Если функция Лагранжа механической системы явно от времени не зависит, а диссипативные силы, отсутствуют то обобщенная энергия является интегралом движения.*

Действительно, при этих условиях из (56.7) получаем

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad H((q), (\dot{q}), t) = H((q_0), (\dot{q}_0), t_0). \quad (58.7)$$

Заметим, что условия существования законов сохранения механической и обобщенной энергии в общем случае не совпадают. Так, для сохранения  $E$  необходимо, чтобы связи

были бы стационарными:  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$ . Условия сохранения  $H$  менее жесткие.

Таким образом, обобщенная энергия является фактически еще одним интегралом движения (при выполнении условий теоремы), который может быть использован при решении конкретных задач.

Чтобы лучше понять различие между  $E$  и  $H$ , установим структуру  $H$ . Согласно (51.7) и (59.7) имеем

$$H = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \\ - T^{(2)} - T^{(1)} - T^{(0)} + U^{(1)} + U^{(0)} = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)}. \quad (59.7)$$

Сравнивая (51.7) с (59.7), видим, что  $E$  и  $H$  совпадают только в том случае, если  $T^{(2)} = T^{(0)} = 0$ , т. е. при условии, что все  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ . Эти условия выполняются, если все связи, наложенные на систему, стационарны.

Пример. *Функция Лагранжа вращающейся рамки.* Система, изображенная на рис. 1.7, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси; нижняя точка рамки может двигаться только вдоль вертикальной оси. Напряженность поля тяжести равна  $(0, 0, -g)$ . Ее стержни жесткие и невесомые, Уравнения связей:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l^2 = 0, \\ f_2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - l^2 = 0, \\ f_3 &= \arctg \frac{y_1}{x_1} - \omega t = 0, \\ f_4 &= \arctg \frac{y_2}{x_2} - \omega t = 0, \\ f_5 &= z_1 - z_2 = 0, \quad f_6 = x_3 = 0, \\ f_7 &= y_3 = 0, \quad f_8 = z_3 - 2z_1. \end{aligned}$$

Рис. 1.7

Число независимых координат равно единице, так как  $3N - 8$  при  $N = 3$  равно 1. В качестве независимой (обобщенной) координаты выберем угол  $\theta$ . Нетрудно проверить, что тогда

$$z_1 = z_2 = -l \cos \theta, \quad z_3 = -2l \cos \theta$$

и уравнения связей удовлетворяются тождественно. Выразим  $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$  через обобщенную координату и обобщенную скорость

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = l \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{z}_3 = 2l \dot{\theta} \cos \theta.$$

Найдем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned}
T &= ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta, \\
T &= T^{(2)} + T^{(0)}, \quad U = -4mgl \cos \theta, \quad U = U^{(0)}, \\
\rho_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 = l^2 \sin^2 \theta, \quad \rho_2^2 = l^2 \sin^2 \theta, \\
L &= T^{(2)} + T^{(0)} - U^{(0)} = ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta + 4mgl \cos \theta.
\end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , сохраняется обобщенная энергия

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}) = H_0.$$

Функцию  $H$  получим из формулы

$$\begin{aligned}
H &= T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)} = ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 - \\
&\quad - ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta - 4mgl \cos \theta.
\end{aligned}$$

Равенство  $H = H_0$  представляет собой первый интеграл движения.

В данном примере  $H$  имеет смысл механической энергии точек в системе отсчета  $S'$ , жестко связанной с рамкой. Чтобы показать это, помимо системы отсчета  $S$  с неподвижными осями  $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$  введем систему отсчета  $S'$ , ось  $\vec{n}_z$  которой направим по оси вращения, ось  $\vec{n}_y$  - в плоскости, а ось  $\vec{n}_x$  - перпендикулярно плоскости рамки. Часть потенциальной энергии систем точек, которая связана с силами инерции, в неинерциальной системе отсчета  $S'$ , движение которой относительно инерциальной системы отсчета  $S$  задано с помощью функций времени -  $\vec{W}(t)$  - ускорения начала системы  $S'$  и  $\vec{\omega}(t)$  - угловой скорости вращения  $S'$  определяется формулой<sup>3</sup>

$$U_h = \tilde{m}(\vec{W}\vec{R}') - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\vec{\omega} \vec{r}'_i]^2.$$

Здесь  $\tilde{m} = \sum_{i=1}^N m_i$ ,  $\vec{R}'$  - радиус-вектор центра масс в  $S'$ ,  $\vec{r}'_i$  - радиус-вектор  $i$ -й точки

в  $S'$ . В рассматриваемом нами случае  $\vec{W} = 0$ ,  $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega)$ ,

$$\vec{r}'_1 = (0, l \sin \theta, -l \cos \theta), \quad \vec{r}'_2 = (0, -l \sin \theta, -l \cos \theta), \quad \vec{r}'_3 = (0, 0, -2l \cos \theta),$$

поэтому  $U_h = -m\omega^2 l^2 \sin^2 \theta$ . Эта часть потенциальной энергии определяет центробежные силы, действующие на точки в  $S'$ . Заметим, что  $U_h$  добавляется к потенциальной энергии частиц, обусловленной действием внешних сил и силами взаимодействия точек системы.

Пример. *Заряженная частица в электромагнитном поле.* Построить лагранжиан заряда  $e$  массы  $m$  в электромагнитном поле, описываемом скалярным  $\Phi$  и векторным  $\vec{A}$



потенциалами. Найти обобщенную энергию. Показать, что уравнения Лагранжа имеют вид

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\vec{H}],$$

где  $\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi$ ,  $\vec{H} = [\vec{\nabla}\vec{A}]$  - напряженности электрического и магнитного полей соответственно.

В качестве обобщенных координат будем использовать декартовы координаты  $x, y, z$ . Тогда

$$T \equiv T^{(2)} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}, \quad T^{(1)} = T^{(0)} = 0, \quad U = -\frac{e}{c}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) + e\Phi,$$

а функция Лагранжа

$$L = T^{(2)} - U^{(1)} - U^{(0)} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) - e\Phi.$$

Из (66.7) следует, что обобщенная энергия заряда в данном случае

$$H = T^{(2)} + U^{(0)} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + e\Phi$$

имеет смысл механической энергии заряда. Очевидно,  $H$  можно также записать в виде

$$H = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \dot{\vec{r}} \right) - L.$$

Уравнение Лагранжа в векторной форме

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = 0.$$

Здесь учтено, что  $\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \vec{r}} = 0$ . Выше было показано, что (см. (40.7) - (44.7))

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\vec{H}],$$

и, значит, уравнения Лагранжа приобретают вид

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{\varepsilon} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\vec{H}].$$

В частности, если поля однородны и постоянны, то векторный и скалярный потенциалы

<sup>3</sup> См., например: Ольховский И. И. Курс теоретической механики, для физиков. Изд-во МГУ, 1974.

можно, например, задать как

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}\vec{r}], \quad \Phi = -(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}),$$

где  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{H}$  - постоянные векторы, не зависящие от координат.

### 7.9. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА - ОСТРОГРАДСКОГО

Идея, которая положена в основу всех интегральных и некоторых дифференциальных принципов, заключается в положении, что реальное движение механической системы сообщает экстремальность некоторой физической величине. Для математической формулировки этого положения необходимо, как и ранее, ввести в рассмотрение наряду с реальным движением совокупность мыслимых движений, подчинив их вполне определенным требованиям.

Формулировка интегральных принципов проводится в конфигурационном пространстве. Напомним, что для системы, обладающей  $s$  степенями свободы, обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , определяющие конфигурацию системы в момент времени  $t$ , рассматриваются как декартовы координаты в соответствующем  $s$ -мерном пространстве, которое и является конфигурационным пространством. С течением времени состояние механической системы изменяется и точка, изображающая эту систему, описывает некоторую кривую. Движение системы удобно рассматривать как движение изображающей точки вдоль этой кривой. Время  $t$  при таком рассмотрении является параметром, а каждой точке траектории будет соответствовать одно или несколько значений  $t$ .

Если нас интересует положение системы на конфигурационной траектории в каждый момент  $t$ , то нужно добавить еще одну ось ( $t$ ). Тогда мы получим “многомерный график” движения рассматриваемой нами системы. Можно также изучать проекции многомерного графика на определенные плоскости, скажем  $tq_j$  (рис. 2.7). На рисунке  $A, B$  являются проекциями изображающей точки в моменты  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, сплошной линией изображено реальное, штриховой - одно из мыслимых движений.

Интегральный принцип - это утверждение о том, как осуществляется реальное движение системы за конечный (не бесконечно малый!) промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Тем, что было с системой до момента времени  $t_1$ , мы не интересуемся. Но коль скоро начальный и конечный моменты времени фиксированы, считается, что механическая система при всех мыслимых движениях в момент времени  $t_1$  проходит через точку  $A$ , в момент  $t_2$  -  $B$ ; эти точки соответствуют начальному и конечному положениям системы в ее реальном движе-

нии.

Наиболее общая формулировка положения о движении механических систем содержится в так называемом принципе наименьшего действия (его называют также принципом Гамильтона - Остроградского):

*Реальное движение механической системы в промежутке времени от  $t_1$  до  $t_2$  таково, что при этом интеграл, называемый функцией действия  $S$  и равный*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (60.7)$$

где  $L = T - U$  -- лагранжиан данной механической системы, имеет экстремум (минимум). Переменная  $t$  при этом не варьируется.

Иными словами, при реальном движении должна быть равна нулю вариация действия

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (61.7)$$

при условии, что все конфигурационные траектории в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  проходят через начальную и конечную точки реального движения, т. е.

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (62.7)$$

Этот принцип, в отличие от дифференциального принципа Д'Аламбера, является интегральным в том смысле, что он содержит утверждение о движении системы в целом за конечный промежуток времени  $\Delta t$ . Фактически из него следуют уравнения Лагранжа, тем самым из принципа наименьшего действия, можно сказать, получается вся динамика механической системы.

Пусть функции  $q_j(t), j = 1, 2, \dots, s$ , описывают реальное движение, т. е.  $q_j(t)$ -те функции, для которых  $S$  имеет минимум. Рассмотрим совокупность функций  $q_j(t) + \delta q_j(t)$  где  $\delta q_j(t)$  - вариации функций  $q_j(t)$ , которые предполагаются малыми по сравнению с  $q_j(t)$  во всем интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Кроме того, все  $\delta q_j(t)$  удовлетворяют соотношениям (62.7). Вычислим так называемую первую вариацию  $S$ , имея в виду, что функция Лагранжа может зависеть от обобщенных координат  $q_j$ , обобщенных скоростей  $\dot{q}_j(t), j = 1, 2, \dots, s$ , и времени  $t$ :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, (\dot{q}), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt.$$

Поскольку  $\delta\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\delta q_j$ , второй член в  $\delta S$  можно проинтегрировать по частям и получить

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

В силу условий (62.7) сумма

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

исчезает, а остающийся интеграл будет равен нулю при произвольных значениях  $\delta q_j$  только тогда, когда каждый член суммы подынтегрального выражения обращается в нуль. Таким образом, мы получаем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (63.7)$$

Полезно помнить, что из решения задачи на экстремум функции получается система конечных уравнений, из которых находится точка, в которой функция достигает экстремального значения. В данном случае мы имеем дело с функционалом, решение задачи на экстремум, которого дает систему дифференциальных уравнений 2-го порядка. Из этих уравнений находится линия в конфигурационном пространстве, задаваемая функциями  $\delta q_j(t)$ , на которой функционал достигает минимума. Линию эту называют экстремалью.

Поскольку задача построения той или иной механической модели состоит в составлении уравнений движения, мы видим, что фактически динамика системы определяется одной функцией - лагранжианом, так как именно эта функция решает поставленную задачу. Таким образом, лагранжиан системы является интересным физическим объектом, изучение которого необходимо в связи с задачами динамики. В частности, из принципа наименьшего действия видно, что функция  $L$  определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от произвольной функции координат и времени. Это нужно понимать так системе, определяемой ее уравнениями движения, соответствует не одна функция Лагранжа  $L$ . Действительно, пусть имеется  $L'$ , связанная с  $L$  соотношением

$$L' = L + \frac{d}{dt} F(t, q_1, \dots, q_s) \quad (64.7)$$

Значит,

$$S = S' - F(t, q_1, \dots, q_s) \Big|_{t_1}^{t_2},$$

а

$$\delta S = \delta S' - \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \Big|_{t=t_2} \delta q_j(t_2) - \frac{\partial F}{\partial q_j} \Big|_{t=t_1} \delta q_j(t_1) \right).$$

Но, так как  $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ ,

$$\delta S = \delta S'$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа, получаемые с помощью функций  $L$  и  $L'$ , одни и те же. Неоднозначность определения функции Лагранжа вида (64.7) не сказывается на уравнениях движения, а каждая  $L'$  из класса (64.7) решает задачу построения динамики системы однозначно.

Важным свойством системы уравнений Лагранжа является их ковариантность. Это означает, что уравнения Лагранжа сохраняют свой вид при точечных преобразованиях обобщенных координат<sup>4</sup>

$$q'_j = q'_j(t, q_1, \dots, q_s), \quad j = 1, \dots, s \quad (65.7)$$

т. е. при пользовании обобщенными координатами  $q'_j$  уравнения Лагранжа будут иметь тот же вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} = 0, \quad L' = L(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}'), t),$$

что и при использовании обобщенных координат  $q_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad L = L(q, \dot{q}, t).$$

Докажем прямо, что уравнения Лагранжа ковариантны относительно преобразования (65.7). Построим  $L'$ :

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}'), t)$$

и производные

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}'_j},$$

<sup>4</sup> Заметим, что точечные преобразования независимых координат, в формулы которых явно входит время, можно рассматривать как преобразования между координатами в различных системах отсчета: в том числе и неинерциальных. Поэтому уравнения движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета можно записать в форме уравнений Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \right) \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_j} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q'_j} \right).$$

Мы воспользовались очевидным соотношением

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}'_j} = \frac{\partial q_k}{\partial q'_j}.$$

Учитывая, что  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \right) = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q'_j}$ , найдем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] = 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

откуда следует, что если

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s,$$

то и

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Ранее уравнения Лагранжа в обобщенных координатах были выведены из принципа Д'Аламбера или, как его также называют, динамического принципа виртуальных перемещений, который является дифференциальным принципом в том смысле, что в нем представлено суждение о движении системы в каждый момент времени  $t$ . Можно показать, что между принципом Д'Аламбера и принципом наименьшего действия, который является интегральным принципом, существует однозначная связь.

Покажем это на примере консервативных систем. Динамический принцип виртуальных перемещений утверждает, что в каждый момент времени  $t$  должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} \delta q_j = 0.$$

Умножим его на  $dt$  и проинтегрируем по  $t$  от  $t_1$  до  $t_2$ . Тогда, если  $\delta t_1 = \delta t_2 = \delta q_1(t_1) = \delta q_2(t_2) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , мы получим

$$\delta S = 0.$$

А это и есть принцип наименьшего действия.

## МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С $s$ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### 8.1. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ

При рассмотрении задачи о собственных линейных колебаниях механических систем будем предполагать что:

1. Связи, наложенные на систему, стационарны, голономны, идеальны, а внешние силы от времени не зависят и являются потенциальными<sup>1</sup>.

2. Система обладает положением устойчивого равновесия.

Поскольку мы будем рассматривать линейные (малые) колебания, встает задача линеаризации уравнений Лагранжа в окрестности положения устойчивого равновесия. Значит, нужно найти такие положения. С этого и начинается исследование собственных колебаний механической системы. В положении равновесия все обобщенные силы должны быть равны нулю т. е.

$$\tilde{F}_1|_{q_j=q_{jeq}} = 0, \quad \tilde{F}_2|_{q_j=q_{jeq}} = 0, \dots, \quad \tilde{F}_s|_{q_j=q_{jeq}} = 0. \quad (1.8)$$

Зная  $\tilde{F}_j(q)$ , из (1.8) находим  $q_{jeq}$ . Если обобщенные силы зависят от  $q_j$  и  $\dot{q}_j$  то для нахождения положений равновесия системы нужно в (1.8) подставить значения  $\dot{q}_j = 0$  и решить полученные уравнения относительно  $q_1, \dots, q_s$ .

Мы рассматриваем системы, на точки которой действуют потенциальные силы, поэтому уравнения (1.8) принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0, \quad (2.8)$$

где  $U$  - потенциальная энергия системы как функция обобщенных координат. Решения  $q_{1eq}, \dots, q_{seq}$  этих уравнений определяют те значения координат, при которых система может находиться в равновесии; этих положений может быть несколько, причем равновесие в некоторых из них может быть устойчивым, а в некоторых - неустойчивым. Устойчивость равновесия удобно рассматривать в фазовом  $2s$  - мерном пространстве (простран-

---

<sup>1</sup> Говоря точнее, здесь мы имеем в виду и механические системы, лагранжианы которых явно от времени не зависят, но допускают структуру  $L = T^{(2)}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) + T^{(0)}(q) - U^{(0)}(q)$ . Если  $T^{(0)} \neq 0$ , то под потенциальной энергией системы, зависящей только от обобщенных координат  $q_1, \dots, q_s$ , мы будем понимать величину  $U(q_1, \dots, q_s) = U^{(0)} - T^{(0)}$ , т. е. член  $T^{(0)}$  в функции Лагранжа мы формально относим к потенциальной энергии. В связи с последним замечанием см. пример к п. 7.7



ство состояний). Механическое состояние в нем представляется в виде точки  $M$   $2s$ -мерного пространства, по осям которого откладываются обобщённые координаты  $q_1, \dots, q_s$  и обобщённые скорости  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ . Точку  $M$  называют изображающей точкой.

Так как устойчивость равновесия рассматривается относительно обобщённых координат и скоростей, то уравнения Лагранжа формально удобно переписать в виде системы  $2s$  уравнений 1-го порядка по времени

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.8)$$

Легко видеть, что (3.8) является системой уравнений 1-го порядка по времени относительно функций  $q_j$  и  $\xi_j$ . Уравнениями (3.8) определяется некоторое движение (состояние) системы  $q_j^0(t)$ ,  $\xi_j^0(t)$ , подлежащее исследованию на устойчивость; оно называется невозмущённым движением. Решения  $q_j^0(t)$  и  $\xi_j^0(t)$  являются частными решениями дифференциальных уравнений (3.8), удовлетворяющими начальным условиям при  $t = t_0$ :

$$q_1^0 \Big|_{t=t_0} = q_1^0(t_0), \dots, q_s^0 \Big|_{t=t_0} = q_s^0(t_0), \xi_1^0 \Big|_{t=t_0} = \xi_1^0(t_0) \dots \quad (4.8)$$

Если теперь изменить начальные условия, придав начальным значениям переменных  $q_j$  и  $\xi_j$  небольшие по модулю приращения при  $t = t_0$ , т.е. переходя к начальным условиям

$$\begin{aligned} q_1 \Big|_{t=t_0} &= q_1^0(t_0) + \delta_{q_1}, \quad \dots, \quad q_s \Big|_{t=t_0} = q_s^0(t_0) + \delta_{q_s}, \\ \xi_1 \Big|_{t=t_0} &= \xi_1^0(t_0) + \delta_{\dot{q}_1}, \quad \dots, \quad \xi_s \Big|_{t=t_0} = \xi_s^0(t_0) + \delta_{\dot{q}_s}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

то соответствующее этим условиям движение называют возмущённым движением, а величины  $\delta_{q_1}, \dots, \delta_{q_s}$ ,  $\delta_{\dot{q}_1}, \dots, \delta_{\dot{q}_s}$  - возмущениями. Возмущённое движение удобно характеризовать с помощью отклонений, или вариаций, величин:

$$x_j = q_j - q_j^0, \quad y_j = \xi_j - \xi_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (6.8)$$

при этом если все отклонения равны нулю, возмущённое движение  $q_j(t)$  и  $\xi_j(t)$  будет совпадать с невозмущённым движением  $q_j^0(t)$ ,  $\xi_j^0(t)$ . Мы видим, что невозмущённому движению отвечают нулевые значения переменных  $x_j$  и  $y_j$  а в фазовом пространстве ему отвечает неподвижная точка  $x_j = y_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Заметим, что уравнения (3.8) будут уравнениями возмущённого движения, если

считать, что в положении равновесия потенциальная энергия системы равна нулю, а все обобщённые координаты  $q_j$  отсчитывать от этого положения, т. е. в формулах (6.8) нужно положить все  $q_j^0$  равными нулю.

Примем далее следующее

*Определение Ляпунова. Пусть для сколь угодно малых (заданных наперед) положительных величин  $\varepsilon_{(q)}$ ,  $\varepsilon_{(\dot{q})}$  можно найти такие положительные величины  $\delta_{(q)}$ ,  $\delta_{(\dot{q})}$ , что для любого  $t > t_0$  все  $|x_j| < \varepsilon_{q_j}$ ,  $|y_j| < \varepsilon_{\dot{q}_j}$ , если только при  $t = t_0$  все  $|x_j(t_0)| < \delta_{q_j}$ ,  $|y_j(t_0)| < \delta_{\dot{q}_j}$  то невозмущенное состояние движения  $q_j^0(t) \equiv q_{jeq}$ ,  $\dot{q}_j(t) = 0$  устойчиво, а положение  $q_{jeq}$  называют положением устойчивого равновесия.*

Следующая теорема Лагранжа определяет достаточные условия равновесия консервативных систем.

Положение равновесия консервативной голономной системы устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум.

*Определение. Минимум потенциальной энергии  $U$  называют изолированным, если в некоторой окрестности положения равновесия  $\Delta_j$ , в которой  $U$  минимальна, нет других экстремумов. Иначе говоря, минимум будет изолированным, если при  $|q_j - q_{jeq}| < \Delta_j$*

$$U((q)) \geq U((q_{eq})),$$

причем знак равенства будет, только если все  $q_j = q_{jeq}$ . Заметим, что положительные величины  $\Delta_j$  определяют окрестность минимума в конфигурационном пространстве. Теорему Лагранжа впервые доказал Дирихле. Современное доказательство, данное А. М. Ляпуновым, вытекает непосредственно из его так называемого прямого метода<sup>2</sup>. В этом методе основную роль играют некоторые вещественные однозначные и непрерывные функции  $V(x, y) = V(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$ , определяемые в области

$$\sum_{j=1}^s (x_j^2 + y_j^2) \leq C,$$

где  $C$  - постоянное положительное число. Начало отсчета выбирается в точке  $x_j, y_j = 0, j = 1, 2, \dots, s$ , т. е. предполагается, что  $V(0,0) = 0$ . Далее проводится классифи-

кация функций  $V(x, y)$ . Так, если всюду в области определения  $V(x, y) \geq 0$  или  $V(x, y) \leq 0$ , то функция  $V(x, y)$  называется знакопостоянной (положительной, если  $V \geq 0$ , или отрицательной, если  $V \leq 0$ ). Если же знакопостоянная функция обращается в нуль только в том случае, когда все  $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s$  равны нулю, то она называется знакоопределенной (определенно-положительной или определено-отрицательной соответственно). Функции, принимающие значения обоих знаков, называют знакопеременными функциями. Введенные так функции  $V(x, y)$ , с помощью которых исследуются проблемы устойчивости движения, называют функциями Ляпунова.

Доказательство теоремы Лагранжа основывается на знаменитой теореме Ляпунова об устойчивости движения. Мы приводим последнюю без доказательства.

*Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию  $V$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$  или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Примеры.

Функция  $V(x, y) = x^2 + 2y^2$  - определено положительная (рис. 1.8). Функция  $V(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  - знакопостоянная, так как в нуль она обращается не только в начале координат  $x = y = 0$ , но и на прямой  $x = y$  (рис. 2.8).

Теперь нетрудно доказать теорему Лагранжа. Отсчитывая  $q_j$  от  $q_{jeq}$ , а  $U((q))$  от  $U((q_{eq}))$ , нетрудно видеть, что в рассматриваемом положении потенциальная энергия равна нулю и имеет изолированный минимум по условию. Это означает, что в некоторой окрестности положения равновесия  $q_{jeq}$  потенциальная энергия  $U$  является определено-положительной функцией переменных  $q_j$  а полная энергия

$$E = T + U \quad (7.8)$$

- определено-положительной функцией обобщенных координат и скоростей. Действительно, кинетическая энергия механической системы с голономными и стационарными связями содержит только форму  $T^{(2)}$ , которая является определено-положительной квадратичной формой обобщенных скоростей. Выберем  $E$  в качестве функций Ляпунова  $V$ . Из уравнений Лагранжа (3.8) следует, что  $E \equiv \dot{H} = 0$  т. е.  $E$  - интеграл движения.

---

<sup>2</sup> Более детально с элементами теории устойчивости можно познакомиться в прекрасной работе Д. Р. Меркина "Введение в теорию устойчивости движения" (М.: Наука, 1987).

Значит,  $\dot{V} = 0$ . Следовательно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения, частным случаем которого является устойчивость равновесия. Теорема Лагранжа доказана.

## 8.2. СОБСТВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задача о собственных линейных колебаниях механических систем по существу является задачей о движении вблизи устойчивого положения равновесия. В силу доказанных теорем такие движения будут устойчивыми. Выведем уравнения, которыми описываются линейные колебания механических систем с голономными, стационарными связями, предполагая, что внешние силы консервативны и не зависят от времени. Для таких систем  $T = T^{(2)} \geq 0$ . Разложим кинетическую и потенциальную энергии системы в окрестности точки  $q_{jeq}$ , ограничиваясь членами второго порядка малости по обобщенным координатам  $q_j - q_{jeq}$  и обобщенным скоростям  $\dot{q}_j$ . В результате получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk}((q_{eq})) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (8.8)$$

$$U = U((q_{eq})) + \sum_{j=1}^s \left. \frac{\partial U}{\partial q_j} \right|_{(q)=(q_{eq})} (q_j - q_{jeq}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{(q)=(q_{eq})} (q_j - q_{jeq})(q_k - q_{keq}). \quad (9.8)$$

Будем отсчитывать  $U$  от  $U((q_{eq}))$  и учтем, что в положении равновесия все обобщённые силы обращаются в нуль:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_j} \right|_{(q)=(q_{eq})} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.8)$$

Напомним, что эти уравнения определяют положения равновесия. Введя  $x = q_j - q_{jeq}$  получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} x_j x_k, \quad (11.8)$$

где

$$c_{jk} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{(q)=(q_{eq})}.$$

В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия  $U$  должна обладать изолированным минимумом.

Из линейной алгебры известно, что если коэффициенты  $c_{jk}$  удовлетворяют критерию Сильвестра

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ c_{k1} \dots c_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad (12.8)$$

то  $U$  будет определено-положительной квадратичной формой переменных  $x_1, \dots, x_s$  в окрестности нуля, а значит,  $U$  имеет изолированный минимум в точке  $q_{1eq}, q_{2eq}, \dots, q_{seq}$  и положение равновесия устойчиво. Заметим, что  $T$ -определенно-положительная квадратичная форма переменных  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s$ . Значит, матрицы коэффициентов  $a_{jk}$  удовлетворяют условиям

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k1} \dots a_{kk} \end{vmatrix} > 0. \quad (13.8)$$

Построим функцию Лагранжа в окрестности начала координат фазового пространства, т. е. в окрестности точки  $x_j = 0, \dot{x}_j = 0$ :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} x_j x_k, \quad (14.8)$$

и составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{x}_k + c_{jk} x_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (15.8)$$

Мы видим, что движение системы с  $s$  степенями свободы около положения устойчивого равновесия определяется, линейными однородными уравнениями с постоянными вещественными симметричными коэффициентами. Решение системы (15.8), как известно, следует искать в виде

$$x_k = C_k e^{\lambda t}, \quad (16.8)$$

где  $C_k$  - некоторые постоянные.

Подставляя (16.8) в (15.8), получим алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (17.8)$$

Нетривиальное, т. е. не равное нулю, решение  $C_k \neq 0$ , ( $k = 1, \dots, s$ ) этой системы существует только в том случае, если детерминант алгебраической системы (17.8) равен нулю, т. е.

$$\det(a_{jk} \lambda^2 + c_{jk})_{j,k=1}^s = 0. \quad (18.8)$$

Это так называемое характеристическое уравнение, представляющее собой, очевидно, алгебраическое уравнение  $2s$ -ой степени относительно  $\lambda$ . Следовательно, в общем случае, оно имеет  $2s$  различных корней  $\lambda_\alpha$ . Корни  $\lambda_\alpha$  называют собственными значениями характеристического уравнения.

Предположим, что все корни  $\lambda_\alpha$  различны, т. е. что кратных корней нет. Соотношения между постоянными  $C_k^\alpha$ <sup>3</sup> определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k^j = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (19.8)$$

Величины  $C_k^\alpha$  иногда называют “амплитудами”, принадлежащими собственному значению  $\lambda_\alpha$ . Общее решение  $x_k$  ( $k = 1, \dots, s$ ) имеет вид

$$x_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t}. \quad (20.8)$$

Знак реальной части  $\operatorname{Re}$  здесь необходим, так как обобщенная координата  $x_k$  по определению величина вещественная.

Для механических консервативных систем, на которые наложены стационарные связи, каждый корень  $\lambda_\alpha$  должен быть чисто мнимым, так как если бы все  $\operatorname{Re} \lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 2s$ ) не равнялись бы нулю, то  $x_k$  и  $\dot{x}_k$  имели бы экспоненциально возрастающие и убывающие со временем множители, что привело бы к нарушению закона сохранения энергии. Таким образом, в этом случае собственные значения характеристического уравнения (18.8) таковы:

$$\operatorname{Re} \lambda_\alpha^\pm = 0, \quad \lambda_\alpha^+ = i\omega_\alpha, \quad \lambda_\alpha^- = -i\omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (21.8)$$

Здесь  $\lambda_\alpha$  перенумерованы от 1 до  $s$ , поскольку каждому номеру соответствует пара

---

<sup>3</sup> Напомним, что  $C_k^\alpha$ , вообще говоря, комплексные постоянные.

комплексно-сопряженных значений корня. Решения (20.8) теперь можно переписать в виде

$$x_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \left\{ (C_k^\alpha)^+ e^{i\omega_\alpha t} + (C_k^\alpha)^- e^{-i\omega_\alpha t} \right\}. \quad (22.8)$$

Положительные вещественные величины  $\omega_\alpha$  называют собственными частотами системы. Значения коэффициентов  $C_k^\alpha$  соответствующих  $\lambda_\alpha^2$ , определяются с помощью однородной системы.

Пусть, например, какой-то из коэффициентов  $C_{k'}^\alpha$  не равен нулю. Переобозначим номер  $k'$ , присвоив ему индекс  $s$ , и перенесём все члены  $(a_{js}\lambda_\alpha^2 + c_{js})C_k^\alpha$  в уравнениях (19.8) в правую сторону. В результате однородная система (19.8) станет неоднородной системой уравнений относительно коэффициентов  $C_k^\alpha$ ,  $k=1, \dots, s-1$ . Ее решение известно из линейной алгебры:

$$C_k^\alpha = \frac{\Delta_k^\alpha C_s^\alpha}{\Delta_s^\alpha}, \quad (23.8)$$

где  $\Delta_k^\alpha$  - алгебраические дополнения к элементу  $k$ -го столбца любой строки характеристического детерминанта, взятого при значении  $\lambda^2 = \lambda_\alpha^2$ . Но так как “амплитуда”  $C_s^\alpha$  не определена, введя  $C_\alpha \equiv C_s^\alpha / \Delta_s^\alpha$ , имеем  $C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha$ , и

$$x_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \left\{ C_\alpha^+ \Delta_k^\alpha (i\omega_\alpha) e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- \Delta_k^\alpha (-i\omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t} \right\}. \quad (24.8)$$

Здесь  $C_\alpha$  - постоянная величина

Так как детерминант (18.8) и все  $\Delta_k^\alpha$  содержат только степени квадрата  $\lambda$ , которые являются вещественными величинами, то детерминант и все дополнения характеристического детерминанта  $\Delta_k^\alpha$  - вещественные величины, которые удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\Delta_k(i\omega_\alpha) = \Delta_k(-i\omega_\alpha). \quad (25.8)$$

Введем

$$\operatorname{Re}(C_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t}) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha). \quad (26.8)$$

С учетом этого общее решение  $x_k$  приобретает вид

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k(\lambda_\alpha^2) a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k(\lambda_\alpha^2) \Theta_\alpha, \quad (27.8)$$

где

$$\Theta_{\alpha} \equiv \cos(\omega_{\alpha} t + \beta_{\alpha}). \quad (28.8)$$

Амплитуда простого гармонического колебания  $a_{\alpha}$  и его начальная фаза  $\beta_{\alpha}$  определяются начальными условиями, т. е. начальными значениями обобщенных координат  $x_j(0)$  и обобщенных скоростей  $\dot{x}_j(0)$ . Отметим три важных свойства собственных линейных колебаний механических систем:

1. Общее решение, описываемое координатой  $x_k$  представляет собой наложение гармонических колебаний с собственными частотами системы  $\omega_{\alpha}$ . Это принцип суперпозиции.

2. Собственные частоты системы не зависят от начальных условий и определяются только механическими свойствами колебательной системы. Это свойство изохронности.

3. Общее решение  $x_k$  не содержит функций вида  $\cos(p\omega_{\alpha} t + \beta_{\alpha})$ , где  $p > 1$  - целое число, т. е. не содержит гармоник, кратных собственным частотам системы. Это свойство, как и первое свойство, есть следствие линейности дифференциальных уравнений.

Заметим, что  $x_k(t)$  не является периодической функцией в общем случае, в то время как  $\Theta_{\alpha}(t)$  - периодическая функция.

В конфигурационном пространстве в случае несоизмеримых частот “траектория” представляет собой незамкнутую кривую. Если частоты соизмеримы, то “траектория” изображающей точки замкнута.

Мы видим также, что собственные частоты  $\omega_{\alpha}$  характеризуют движение системы в целом, а не изменение одной какой-то координаты  $x_k$ . Однако можно так задать начальные условия, чтобы все координаты гармонически изменялись бы со временем с одной из собственных частот системы. Действительно, амплитуды  $a_{\alpha}$  и начальные фазы  $\beta_{\alpha}$  определяется начальными условиями. Пусть начальные условия таковы, что все  $a_{\alpha}$ , кроме  $a_{\gamma}$ , равны нулю. Тогда  $x_k = a_{\gamma} \Delta_k(\lambda_{\gamma}^2) \cos(\omega_{\gamma} t + \beta_{\gamma})$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ .

В общем случае изменение каждой из координат системы со временем представляет наложение  $s$  простых периодических колебаний  $\Theta_1, \dots, \Theta_s$  с произвольными амплитудами и фазами, но имеющих вполне определенные частоты. А можно ли так выбрать обобщенные координаты, чтобы каждая из них совершала только одно гармоническое (простое) колебание?



Путь к решению этой задачи указывают соотношения (27.8). Рассмотрим их как систему  $s$  уравнений относительно  $s$  неизвестных величин  $\Theta_\alpha$ . Разрешим эту систему, выразив  $\Theta_\alpha$  через обобщенные координаты  $x_1, \dots, x_k$ , и выберем величины  $\Theta_\alpha$  в качестве новых обобщенных координат. Эти координаты называют нормальными (или главными), а соответствующие им простые гармонические колебания нормальными (главными) колебаниями механической системы. Уравнение Лагранжа в координатах  $\Theta_\alpha$  выглядят особенно просто:

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (29.8)$$

Мы видим, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на  $s$  независимых уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой же координаты, и для полного определения ее зависимости от времени надо знать начальные значения только ее самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы кинематически и динамически.

Очевидно, функция Лагранжа системы, выраженная через нормальные координаты (и скорости) распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одномерному колебанию<sup>4</sup> с одной из собственных частот  $\omega_\alpha$ :

$$L = \sum_{\alpha=1}^s L_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{a_\alpha}{2} \dot{\Theta}_\alpha^2 - \frac{c_\alpha}{2} \Theta_\alpha^2 \right). \quad (30.8)$$

Отсюда видно, что введение нормальных координат равносильно одновременному приведению двух квадратичных форм (кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергии) к диагональному (или, как говорят, к каноническому) виду. Для консервативных систем с идеальными голономными связями нормальные координаты можно ввести всегда, так как матрицы коэффициентов  $a_{kj}$  и  $c_{kj}$  в  $T$  и  $U$  таких систем удовлетворяют условиям следующей теоремы:

*Если даны, две вещественные симметрические матрицы  $A$  и  $C$ , причем матрица  $A$  определительно-положительная, то существует невырожденная матрица  $B$  такая, что обе матрицы с ее помощью преобразуются к диагональному виду.*

**Нулевая частота.** Пусть одна из собственных частот  $\omega_\beta = 0$ . Соответствующее решение в нормальных координатах тогда имеет вид  $\Theta_\beta = \dot{\Theta}_{\beta 0} t + \Theta_{\beta 0}$ . С физической точки

<sup>4</sup> Одномерным колебанием называют колебание системы с одной степенью свободы.

зрения такое решение возникает, если потенциальная энергия системы достигает минимума не в одной точке конфигурационного пространства, а в некоторой области, т. е. когда потенциальная энергия не имеет изолированного минимума.

**Кратные частоты.** Общий вид решений  $x_k$  и  $\Theta_\alpha$  остается таким же (с таким же числом  $s$  членов) с той лишь разницей, что коэффициенты  $\Delta_n^\gamma$ , соответствующие кратному корню  $\lambda_\gamma$  уже не являются алгебраическими дополнениями характеристического детерминанта и должны быть прямо определены из уравнений (19.8). Каждой кратной (или, как говорят, вырожденной) частоте  $\omega_\gamma$  отвечает столько нормальных координат, какова степень кратности, но выбор этих координат не однозначен. Поскольку в кинетическую и потенциальную энергии нормальные координаты (с одинаковой  $\omega_\gamma$ ) входят в виде одинаково преобразующихся сумм  $\sum \dot{\Theta}_\alpha^2$  и  $\sum \Theta_\alpha^2$ , то их можно подвергнуть любому линейному преобразованию, оставляющему инвариантной сумму квадратов.

Пример. Доказать, что для консервативных систем с голономными стационарными связями все корни  $\lambda_\alpha^2$  отрицательны.

Умножим каждое из уравнений

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\lambda^2 + c_{jk})C_k = 0, \quad j=1, \dots, s \quad (31.8)$$

на  $C_j$  и сложим все полученные соотношения:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\lambda^2 + c_{jk})C_k C_j = 0. \quad (32.8)$$

Подставим в (32.8)  $\lambda_\alpha^2$  вместо  $\lambda^2$  и возьмем соответствующие амплитуды  $C_k^\alpha$ ,  $C_j^\alpha$ . Тогда,

$$\sum_{j,k=1}^s (a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk})\Delta_k(\lambda_\alpha^2)\Delta_j(\lambda_\alpha^2)C_\alpha^2 = 0 \quad (33.8)$$

или

$$\lambda_\alpha^2 = - \frac{\sum_{j,k=1}^s c_{jk}\Delta_j(\lambda_\alpha^2)\Delta_k(\lambda_\alpha^2)}{\sum_{j,k=1}^s a_{jk}\Delta_j(\lambda_\alpha^2)\Delta_k(\lambda_\alpha^2)}. \quad (34.8)$$

Здесь числитель и знаменатель всегда положительны для вещественных  $\lambda_\alpha^2$ . Это следует из того, что обе однородные квадратичные формы ( $T$  и  $U$ ) являются определено-положительными, т.е. они положительны при всех вещественных значениях обоих

аргументов  $((q)$  и  $(\dot{q})$  соответственно). В полученной нами формуле стоят именно так составленные квадратичные формы, так как  $\Delta_k(\lambda_\alpha^2)$ ,  $\Delta_j(\lambda_\alpha^2)$  всегда вещественны как определители, все элементы которых вещественны.

### 8.3. КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК

Рассмотрим собственные колебания системы  $N$  частиц, соединенных одинаковыми пружинками жесткости  $\chi$  и длины  $l$  в ненапряженном состоянии, которые могут двигаться по кольцу радиуса  $R$  (рис. 3.8). Масса каждой из частиц равна  $m$ . Будем считать, что силы, действующие на частицы со стороны пружинок, пропорциональны удлинению пружинок в первой степени. Заметим, что такая цепочка представляет собой простейшую модель, используемую в теории твердого тела. Функция Лагранжа системы

$$L((\dot{x}), (x)) = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2 - \frac{\chi}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1})^2, \quad (35.8)$$

где  $x_n$  - смещение  $n$ -ой частицы из положения равновесия:  $x_n = R(\varphi_n - \varphi_{neq})$ , причем  $x_1 = x_{N+1}$ . Из (35.8) получаем уравнения Лагранжа

$$m\ddot{x}_n + \chi(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (36.8)$$

при дополнительном условии  $x_0 = x_N$ . Решение удобно искать в виде

$$x_n = Ce^{i(\omega t - n\psi)}. \quad (37.8)$$

Подставляя  $x_n$  в уравнения Лагранжа, получаем уравнение

$$\omega^2 = 4 \frac{\chi}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad (38.8)$$

которым определяется связь частоты с разностью фаз колебаний  $\psi$  соседних частиц. Решение (37.8) представляет собой бегущую волну с волновым вектором  $k = \psi/l$ , так как  $n\psi = nkl = kx_n$ , где  $l = 2\pi R/N$  - равновесная длина одной пружинки,  $x_n = nl$  - координата положения равновесия  $n$ -ой частицы, отсчитываемая от  $N$ -ой частицы в одном и том же направлении. Из условия  $x_1 = x_{N+1}$  определим возможные значения частот (как говорят, спектр частот):

$$e^{-iN\psi} = 1, \quad \psi N = 2\pi j, \quad \psi_j = \frac{2\pi}{N},$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Поэтому имеем  $N$  частот:

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}} \sin \frac{\pi j}{N}. \quad (39.8)$$

очевидно, частоты  $\omega_j$  и  $\omega_{N-j}$  совпадают, а волновые векторы  $\psi_j$  и  $\psi_{N-j}$  связаны соотношением

$$\psi_j = 2\pi - \psi_{N-j}, \quad (40.8)$$

т.е. волновые векторы отличаются знаком. Одна из собственных частот  $\omega_0$  равна нулю. Все пружины в этом случае ненапряжены, а все частицы движутся по кольцу с постоянной скоростью, т.е. движение представляет трансляцию всей системы как целого. Все возможные решения имеют вид

$$x_n^{(j)} = \text{Re} C_j e^{i(\omega_j t - n\psi_j)}. \quad (41.8)$$

Они описывают бегущие по кольцу волны. Из (40.8) и (41.8) следует, что решения  $\psi_j$  и  $\psi_{N-j}$  (с двукратным вырождением частот  $\omega_j$  и  $\omega_{N-j}$ ) соответствуют волнам, распространяющимся в разные стороны. В результате наложения таких волн с равными амплитудами получается стоячая волна

$$x_n^{(j)} \pm x_n^{(N-j)} = 2|A_j| \begin{cases} \cos n\psi_j \cos(\omega_j t + \beta_j), \\ \sin n\psi_j \sin(\omega_j t + \beta_j), \end{cases} \quad (42.8)$$

которая описывает нормальные колебания:

$$\Theta_{j1} = 2|A_j| \cos(\omega_j t + \beta_j), \quad \Theta_{j2} = 2|A_j| \sin(\omega_j t + \beta_j).$$

Здесь  $j = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ , причём предполагается, что  $N$  нечетное. Для  $N$  четных решение (42.8) при  $j = N/2$  есть стоячая волна, а частота  $\omega_{N/2}$ , очевидно, невырожденная.

Для нечетных  $N$  решение  $x_n$ , записанное в нормальной форме, имеет вид

$$x_n = \sum_{j=1}^{(N-1)/2} (\Theta_{j1} \cos n\psi_j + \Theta_{j2} \sin n\psi_j) + \Theta_0, \quad (43.8)$$

где  $\Theta_0$  - нормальная координата, описывающая “колебание” с нулевой частотой.

Нетрудно показать, что функция Лагранжа (35.8) подстановкой (43.8) диагоналізується:

$$L = \frac{Nm}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} [\dot{\Theta}_{j1}^2 + \dot{\Theta}_{j2}^2 - \omega_j^2 (\Theta_{j1}^2 + \Theta_{j2}^2)] + \dot{\Theta}_0^2 \right\}. \quad (44.8)$$

Здесь мы воспользовались выражениями известных сумм:

$$\sum_{n=1}^N \sin n\psi_j = \sum_{n=1}^N \cos n\psi_j = 0,$$

$$\sum_{n=1}^N \sin^2 n\psi_j = \sum_{n=1}^N \cos^2 n\psi_j = \frac{N}{2}.$$

Спектр собственных частот  $\omega_j$  представляет собой совокупность дискретных точек на синусоиде (рис. 4.8). Этот спектр частот называют акустическим. Иногда удобно изображать  $|\omega_j|$ , как на рис. 5.8.

#### 8.4. КОЛЕБАНИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ

Кинетическая энергия системы (рис. 6.8)

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Потенциальная энергия системы вблизи положения устойчивого равновесия, которое, очевидно, определяется значениями обобщенных координат  $\varphi_{1eq} = \varphi_{2eq} = 0$ :

$$U = \frac{mgl}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\chi l^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{mgl}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\chi l^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \quad (45.8)$$

Уравнения Лагранжа

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - \tilde{\omega}_0^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 + \tilde{\omega}_0^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Здесь  $\omega_0^2 = g/l$ ,  $\tilde{\omega}_0^2 = \chi/m$ . Решение ищем в виде  $\varphi_1 = C_1 e^{\lambda t}$ ,  $\varphi_2 = C_2 e^{\lambda t}$ .

Уравнения для амплитуд

$$C_1(\lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2) - \tilde{\omega}_0^2 C_2 = 0,$$

$$-\tilde{\omega}_0^2 C_1 + (\lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2) C_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2 & -\tilde{\omega}_0^2 \\ -\tilde{\omega}_0^2 & \lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или  $\lambda^2 + \omega_0^2 + \tilde{\omega}_0^2 = \pm \tilde{\omega}_0^2$ , откуда

$$\lambda_1^2 = -\omega_0^2, \quad \lambda_2^2 = -(\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}_0^2).$$

Следовательно, собственные частоты колебаний

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}_0^2}.$$

Найдем теперь, алгебраические дополнения  $\Delta_k(\lambda_\alpha^2)$ . Для этого нужно вычеркнуть в характеристическом детерминанте последнюю строку,  $k$ -й столбец и умножить оставшийся определитель на  $(-1)^{s+k}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda_1^2) &= \tilde{\omega}_0^2, & \Delta_1(\lambda_2^2) &= \tilde{\omega}_0^2, \\ \Delta_2(\lambda_1^2) &= \tilde{\omega}_0^2, & \Delta_2(\lambda_2^2) &= -\tilde{\omega}_0^2. \end{aligned} \quad (46.8)$$

Решения

$$\varphi_1 = \tilde{\omega}_0^2(\Theta_1 + \Theta_2), \quad \varphi_2 = \tilde{\omega}_0^2(\Theta_1 - \Theta_2), \quad (47.8)$$

где  $\Theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1)$ ,  $\Theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2)$  - нормальные координаты. Амплитуды простых колебаний  $a_\alpha$  и начальные фазы  $\beta_\alpha$  определяются начальными условиями.

Покажем, что всегда можно так задать начальные условия, что все координаты  $(\varphi_1, \varphi_2)$  будут гармонически изменяться со временем с одной из собственных частот. Пусть  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \tilde{\omega}_0^2(a_1 \cos \beta_1 + a_2 \cos \beta_2), & 0 &= \tilde{\omega}_0^2(a_1 \omega_1 \sin \beta_1 + a_2 \omega_2 \sin \beta_2), \\ \varphi_0 &= \tilde{\omega}_0^2(a_1 \cos \beta_1 - a_2 \cos \beta_2), & 0 &= \tilde{\omega}_0^2(a_1 \omega_1 \sin \beta_1 - a_2 \omega_2 \sin \beta_2). \end{aligned}$$

Отсюда  $a_1 = \varphi_0 / \tilde{\omega}_0^2$ ,  $a_2 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$  и решение

$$\varphi_{1,2} = \tilde{\omega}_0^2 \Theta_1, \quad \Theta_1 = a_1 \cos \omega_1 t.$$

Пусть теперь  $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ . Тогда  $a_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $a_2 = \varphi_0 / \tilde{\omega}_0^2$  и решение

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \tilde{\omega}_0^2 \Theta_2, \quad \Theta_2 = a_2 \cos \omega_2 t.$$

Очевидна роль симметрии начальных условий.

Рассмотрим случай слабой связи  $\omega_0^2 \gg \tilde{\omega}_0^2$ . При этом условии имеем

$\omega_1 = \omega_0$ ,  $\omega_2 \cong \omega_0 + \frac{\tilde{\omega}_0^2}{\omega_0} = \omega_0 + \varepsilon$ , причем  $\varepsilon \ll \omega_0$ . Запишем решение в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \tilde{\omega}_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_1 e^{i\beta_1} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a_2 e^{i\varepsilon t + i\beta_2} \right\} e^{i\omega_0 t} = \operatorname{Re} \left( \begin{pmatrix} A_1 e^{i\gamma_1} \\ A_2 e^{i\gamma_2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \right), \quad (48.8)$$

где

$$A_{1,2} = \tilde{\omega}_0^2 \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \pm 2a_1 a_2 \cos(\varepsilon t + \beta_2 - \beta_1)},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{1,2} = \frac{a_1 \sin \beta_1 \pm a_2 \sin(\varepsilon t + \beta_2)}{a_1 \cos \beta_1 \pm a_2 \cos(\varepsilon t + \beta_2)}. \quad (49.8)$$

Амплитуды  $A_{1,2}$  медленно изменяются с частотой  $\varepsilon \ll \omega_0$  в пределах  $\tilde{\omega}_0^2 |a_1 - a_2| \leq A_{1,2} \leq \tilde{\omega}_0^2 |a_1 + a_2|$ . Это явление называют биением. Проиллюстрируем этот эффект при следующих начальных условиях:  $\varphi_1(0) = \varphi_0$ ,  $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ . Тогда  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $a_1 = a_2 = \varphi_0 / 2\tilde{\omega}_0^2$  и решение

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_0 t + \cos(\omega_0 + \varepsilon)t) = \left(\varphi_0 \cos \frac{\varepsilon t}{2}\right) \cos \omega_0 t,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_0 t - \cos(\omega_0 + \varepsilon)t) = \left(\varphi_0 \sin \frac{\varepsilon t}{2}\right) \sin \omega_0 t.$$

Амплитуды колебаний являются медленно меняющимися функциями времени, а решения представляют собой гармонические колебания с частотой  $\omega_0$ , но периодически меняющейся амплитудой, период изменения которой  $T_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon} \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ . В начальный момент амплитуда первого маятника максимальна (она равна  $\varphi_0$ ), а амплитуда второго маятника равна нулю. Затем амплитуда колебаний первого маятника убывает и через время  $t = T_1 / 4$  обращается в нуль. Амплитуда колебаний второго маятника - возрастает, достигая максимального значения  $\varphi_0$  при  $t = T_1 / 4$ . Далее процесс повторяется в обратном порядке, т. е. происходит непрерывный обмен энергией колебаний между маятниками. При  $T_1 \gg 2\pi/\omega_0$  амплитуды колебаний маятников  $A_{1,2}(t)$  в течение одного периода  $T = 2\pi/\omega_0$  практически неизменны. В этом случае имеет смысл рассматривать средние (за период  $T$ ) значения квадратов обобщенных координат и скоростей для каждого из связанных маятников в отдельности, и в частности, можно определить “средние механические энергии” для каждого маятника согласно формулам

$$E_1(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \omega_0^2 \varphi_1^2) dt \cong \frac{E}{2} (1 + \cos \varepsilon t),$$

$$E_2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_2^2 + \omega_0^2 \varphi_2^2) dt \cong \frac{E}{2} (1 - \cos \varepsilon t),$$

где  $E = ml^2 \omega_0^2 \varphi_0^2 / 2$ , и при дифференцировании  $\varphi_{1,2}(t)$  по  $t$  мы положили  $\dot{A}_{1,2} = 0$ , а при интегрировании пренебрегли изменением  $A_{1,2}(t)$  за время  $T$ . В рассматриваемом случае

равенства масс и длин подвесов обмен энергией является полным: маятники настроены в резонанс. Если же маятники не одинаковы, то обмен будет неполным.

Обмена энергией не происходит также в тех случаях, когда каждая координата выражается через одну нормальную координату, так что нет сложения нормальных колебаний.

Приведем выражение для функции Лагранжа в нормальных координатах  $\theta_1, \theta_2$ , связанных с координатами  $\varphi_1, \varphi_2$  формулами (47.8):

$$L = ml^2 \tilde{\omega}_0^4 \{ \dot{\theta}_1^2 - \omega_0^2 \theta_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - (\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}_0^2) \theta_2^2 \}. \quad (50.8)$$

## 8.5. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Примем описанную в 8.2 процедуру построения решений уравнения движения механической системы с одной степенью свободы, т. е. рассмотрим случай  $s = 1$ .

Если  $s = 1$ , точка равновесия  $q_{eq}$  в конфигурационном пространстве определяется из уравнения

$$\frac{dU}{dq} = 0,$$

причем положение равновесия будет устойчивым, если

$$K = \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_{eq}} > 0. \quad (51.8)$$

Если условие (51.8) выполняется, то в окрестности точки  $q_{eq}$  возникает сила, направленная к точке  $q_{eq}$ , которая стремится возвратить систему к точке  $q_{eq}$  (рис. 8.8). Вводя координату  $x = q - q_{eq}$  и обозначая коэффициент  $a(q_{eq})$  в выражении кинетической энергии буквой  $m$ , представим функцию Лагранжа механической системы в виде

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (52.8)$$

Здесь мы сохранили, только квадратичные члены, пропорциональные  $\dot{x}^2$ ,  $x^2$ . Система, которая описывается лагранжианом вида (52.8), называется одномерным гармоническим



осциллятором. Уравнение движения гармонического осциллятора (уравнение Лагранжа)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (53.8)$$

Решение

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

или

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (54.8)$$

где постоянные  $C_1, C_2, a$  и  $\alpha$  определяются начальными условиями. Они связаны соотношениями

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (55.8)$$

Постоянную  $a$  называют амплитудой,  $\omega t + \alpha$  - фазой,  $\omega$  - циклической частотой или просто частотой колебаний. Начальная фаза  $\alpha$  зависит от выбора начала отсчета времени. Частота определяется механическими свойствами системы и не зависит от начальных условий и, в частности, от амплитуды (свойство изохронности). Подчеркнем, что это свойство связано с выбранным приближением квадратичной зависимости потенциальной энергии от координаты. При сохранении членов более высокого порядка малости оно исчезает.

Энергия осциллятора сохраняется, так как  $U(x)$  явно от времени не зависит. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2}{2}. \quad (56.8)$$

Амплитуда и фаза выражаются через начальное механическое состояние  $x_0, \dot{x}_0$  из соотношений

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad \dot{x}_0 = -a\omega \sin \alpha, \quad (57.8)$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega}. \quad (58.8)$$

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени удобно представить в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}), \quad (59.8)$$

где  $A = ae^{i\alpha}$  - комплексная амплитуда, ее модуль равен амплитуде  $a$ , а аргумент - на-

чальной фазе  $\alpha$ .

Механическое состояние осциллятора определяется заданием  $x, \dot{x}$  в фазовом пространстве. В случае одномерной системы это фазовая плоскость переменных  $x, \dot{x}$ , рассматриваемых как декартовы координаты. Если начальное состояние осциллятора задано координатами  $x_0, \dot{x}_0$ , то изображающая точка  $M(x_0, \dot{x}_0)$  с течением времени  $t > 0$  описывает фазовую траекторию в фазовой плоскости согласно

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (60.8)$$

или в явном виде (рис. 9.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega^2} = 1. \quad (61.8)$$

Это уравнение эллипса; его можно также получить из закона сохранения энергии.

Фазовое пространство оказывается весьма удобным для изучения нелинейных колебаний.

Задание начального механического состояния однозначно определяет фазовую траекторию; семейство фазовых траекторий является, очевидно, однопараметрическим, так как они определяются не  $x_0$  и  $\dot{x}_0$  порознь, а их комбинацией, образующей  $E$ :

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Фазовые траектории между собой не пересекаются. Это следует из однозначности решений уравнений движения по начальным условиям. В данном случае все фазовые траектории являются подобными эллипсами, поскольку отношение их полуосей постоянно и равно  $\omega$ .

## 8.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если механическую систему поместить в переменное (во времени) внешнее поле, то в ней могут возбудиться вынужденные колебания. Рассмотрим эту задачу на примере одномерного гармонического осциллятора. Потенциальную энергию системы представим в виде

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \tilde{U}(x, t), \quad (62.8)$$

где первый член описывает собственную потенциальную энергию осциллятора, а второй -

потенциальную энергию системы во внешнем переменном поле. Предположим, что переменное поле достаточно слабое, так что отклонения  $x(t)$  от положения равновесия и колебания в целом по-прежнему являются малыми. Если это так, то  $\tilde{U}(x, t)$  можно разложить в ряд по степеням малой величины  $x$ , ограничиваясь двумя первыми членами:

$$\tilde{U}(x, t) = \tilde{U}(0, t) + \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot x. \quad (63.8)$$

Учитывая, что  $\tilde{U}(0, t)$  - заданная функция времени и потому ее можно опустить в функции Лагранжа, а производная  $\left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right|_{x=0} = F(t)$  есть “внешняя” сила в положении равновесия системы, функцию Лагранжа гармонического осциллятора в переменном внешнем поле представим в виде

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t). \quad (64.8)$$

Уравнение Лагранжа, описывающее вынужденные колебания осциллятора, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (65.8)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, представляется в виде суммы двух выражений:  $x = x_{об} + \tilde{x}$ , где  $x_{об}$  - общее решение однородного уравнения, а  $\tilde{x}$  - частный интеграл неоднородного уравнения. Заметим, что  $x_{об}$  найдено в предыдущем пункте.

Особый интерес в связи с различными приложениями представляет случай, когда внешняя вынуждающая сила является простой периодической функцией времени частоты  $\tilde{\omega}$ :

$$F_0 \cos(\tilde{\omega}t + \beta). \quad (66.8)$$

Тогда  $\tilde{x}(t)$  ищется в виде

$$\tilde{x}(t) = b \cos(\tilde{\omega}t + \beta) \quad \color{yellow}{!}$$

Подставляя (66.8) и это решение в уравнение (65.8) находим амплитуду

$$b = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}. \quad (67.8)$$

Полное решение уравнения (65.8) имеет вид

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} \cos(\tilde{\omega} t + \beta), \quad (68.8)$$

а постоянные  $a$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий. Движение осциллятора под действием периодической вынуждающей силы представляет собой сумму двух колебаний с частотами  $\omega_0$  и  $\tilde{\omega}$ .

Рассмотрим случай резонанса, когда частоты  $\omega_0$  и  $\tilde{\omega}$  совпадают. Для этого перепишем (68.8) в виде

$$x = A \cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)} (\cos(\tilde{\omega} t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)). \quad (69.8)$$

Постоянные  $A$  и  $\gamma$ , очевидно, определяются постоянными  $a$ ,  $\alpha$ , а также параметрами, характеризующими переменное поле. В пределе  $\tilde{\omega} \rightarrow \omega_0$ , раскрывая неопределенность вида  $0/0$  во втором члене (69.8), получим

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{m\varepsilon(\omega_0 + \tilde{\omega})} (\cos((\omega_0 - \varepsilon)t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)) \Big|_{\varepsilon=\omega_0 - \tilde{\omega} \rightarrow 0} = \\ &= A \cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0}{m\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \beta). \end{aligned} \quad (70.8)$$

Видно, что амплитуда колебаний в случае резонанса растет со временем по линейному закону. Заметим, что решение (70.8) применимо лишь на ограниченных отрезках времени, до тех пор, пока колебания являются малыми.

## 8.7. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим движение гармонического осциллятора, когда на него действует обобщенная сила трения вида

$$F_{mp} = -\alpha \dot{x}. \quad (71.8)$$

Здесь постоянная  $\alpha > 0$ ,  $x$  - обобщенная скорость, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя (71.8) в правую часть (53.8), получим

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x}. \quad (72.8)$$

Разделим (72.8) на  $m$  и введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\mu. \quad (73.8)$$

Здесь  $\omega_0$  - частота собственных колебаний системы в отсутствие трения,  $\mu$  - коэффициент затухания.

Движение осциллятора при наличии силы трения (71.8) описывается однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (74.8)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x = Ce^{\lambda t}. \quad (75.8)$$

Подставляя (75.8) в (74.8), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (76.8)$$

Общее решение уравнения (74.8) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}. \quad (77.8)$$

Далее следует различать два случая. Если  $\omega_0 > \mu$ , то

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}, \quad (78.8)$$

и общее решение можно представить в виде

$$x = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (79.8)$$

где  $a$  и  $\alpha_0$  - вещественные постоянные. Их можно выразить через начальные значения  $x_0, \dot{x}_0$ :

$$x_0 = a \cos \alpha_0, \quad \dot{x}_0 = -\mu x_0 - \omega a \sin \alpha_0,$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \mu x_0)^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\dot{x}_0 + \mu x_0}{\omega x_0}.$$

Формулы (78.8), (79.8) описывают движение, которое называют затухающими колебаниями. Хотя функция (79.8) не удовлетворяет условию периодичности  $f(t) = f(t+T)$  описываемое движение можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Такое движение называют условно-периодическим, поскольку интервал времени  $T$  между двумя соседними максимумами отклонения от положения равновесия является постоянной величиной

$$T = 2\pi/\omega, \quad (80.8)$$

$T$  называют условным периодом.

Заметим, что частота колебаний  $\omega$ , как и в случае собственных колебаний, определяется только параметрами системы и не зависит от амплитуды колебаний (свойство изохронности). За время  $T$  амплитуда колебания уменьшается в  $e^{\mu T}$  раз. Показатель

экспоненты  $\mu T$  называют логарифмическим декрементом, так как

$$\mu T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}. \quad (81.8)$$

Если  $\mu > \omega_0$ , то оба корня  $\lambda_{1,2}$  вещественны и отрицательны. Общее решение

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (82.8)$$

всегда вещественно при вещественных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Движение в этом случае, характеризующемся достаточно большим трением, не является колебательным. Положение равновесия точка проходит за конечное время не более одного раза. Движение состоит в асимптотическом (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближении к положению равновесия независимо от начальных условий. Этот тип движения называют аperiодическим затуханием.

Наконец, если  $\mu = \omega_0$ , характеристическое уравнение имеет всего один (кратности два) корень  $\lambda = -\mu$ . Общее решение в этом случае имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\mu t}, \quad (83.8)$$

в чем можно убедиться прямой подстановкой (83.8) в (74.8). Движение это не имеет колебательного характера, представляя собой особый случай аperiодического затухания.

Пример. *Вынужденные колебания при наличии трения.* Найти закон движения гармонического осциллятора, на который действует сила трения  $F_{mp} = -\alpha \dot{x}$  и вынуждающая сила  $F(t) = F_0 \cos \tilde{\omega} t$ , если при  $t = 0$   $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ .

Уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \tilde{\omega} t,$$

где  $2\mu = \frac{\alpha}{m}$ . Запишем правую часть как  $\operatorname{Re} \frac{F_0}{m} e^{i\tilde{\omega} t}$ . Частный интеграл ищем в виде

$x = \operatorname{Re} B e^{i\tilde{\omega} t}$ , причем  $B = b e^{i\delta}$ . Подставляя решение в уравнение движения, получим

$$B(\omega_0^2 + i2\mu\tilde{\omega} - \tilde{\omega}^2) = \frac{F_0}{m}.$$

Отсюда

$$b = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\mu^2 \tilde{\omega}^2}}, \quad \delta = -\operatorname{arctg} \frac{2\mu\tilde{\omega}}{\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2}, \quad x = \operatorname{Re} B e^{i\tilde{\omega} t} = b \cos(\tilde{\omega} t + \delta).$$

Добавляя к частному интегралу общее решение однородного уравнения (мы полагаем, что  $\mu < \omega_0$ )

$$x_{os} = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2},$$

получим полное решение

$$x(t) = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha_0) + b \cos(\tilde{\omega} t + \delta).$$

Заметим, что при  $t \gg 1/\mu$  амплитуда собственных колебаний асимптотически обратится в нуль и колебания осциллятора будут происходить с частотой  $\tilde{\omega}$ . Это так называемые установившиеся колебания.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , имеет вид

$$x(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\mu\tilde{\omega}^2} \left[ (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) (\cos\tilde{\omega}t - e^{-\mu t} \cos\omega t) + 2\mu\tilde{\omega} \left( \sin\tilde{\omega}t - \frac{\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2}{2\omega\tilde{\omega}} e^{-\mu t} \sin\omega t \right) \right].$$

Заметим, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, так как  $\delta < 0$  всегда.

**Глава 9**  
**ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ**  
**9.1. СИСТЕМЫ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ**

Введение обобщенного потенциала  $U(q, t) = U^{(0)} + U^{(1)}$ , где  $U^{(1)} = A_i(q, t)\dot{q}_i$ , позволяет описывать гироскопические силы. Мощность гироскопических сил равна нулю, и в случае  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  они не вносят вклад в интеграл обобщенной энергии

$$H = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)},$$

поэтому гироскопические силы не меняют положения равновесия системы. Однако гироскопические силы могут существенно изменить характер движения.

Рассмотрим движение заряженной частицы массы  $m$  заряда  $e$  в магнитном поле. Пусть на частицу действует поле, направленное вдоль оси  $OZ$  инерциальной системы отсчета, и кроме того, на нее действуют потенциальные силы, энергия которых определяется формулой  $U(r) = k\vec{r}^2 / 2$  (пространственный осциллятор).

Выберем вектор-потенциал магнитного поля

$$A = \{-Hy, 0, 0\}.$$

Вектор-потенциал определен неоднозначно, поскольку функция Лагранжа определена с точностью до преобразования

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t),$$

не меняющего уравнений движения. В рассматриваемом случае функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{eH}{c} y\dot{x} - \frac{k\vec{r}^2}{2} \quad (1.9)$$

приводит к уравнениям движения - линейным однородным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - \Omega\dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \Omega\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Здесь введены обозначения  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\Omega = \frac{eH}{mc}$ . Движение вдоль оси  $OZ$  определяется лишь полем осциллятора и происходит по гармоническому закону:

$$z = z_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Движение в плоскости  $OXY$  не зависит от движения вдоль оси  $OZ$  и определяется



обычным образом с помощью подстановки Эйлера

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad y = Be^{i\omega t},$$

что дает систему уравнений для определения комплексных коэффициентов  $A$ ,  $B$ :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_0^2)A - i\omega\Omega B = 0, \\ i\omega\Omega A + (-\omega^2 + \omega_0^2)B = 0. \end{cases}$$

Нетривиальное решение системы существует при значениях  $\omega$ , определяемых из характеристического уравнения

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_L^2} \pm \Omega_L, \quad (3.9)$$

где  $\Omega_L = \Omega/2$  - ларморовская частота.

Соответствующая этим частотам связь между комплексными коэффициентами  $A^{\pm}$ ,  $B^{\pm}$ :

$$B_- = -iA_-, \quad B_+ = iA_+ \quad (4.9)$$

приводит (после выделения действительной части) к решению системы в виде

$$\begin{aligned} x &= R_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) + R_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+), \\ y &= R_- \sin(\omega_- t + \varphi_-) - R_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+). \end{aligned}$$

Таким образом движение частицы в магнитном поле может быть представлено как суперпозиция вращений по окружностям радиусов  $R_-$  и  $R_+$  с соответствующими частотами  $\omega_-$  и  $\omega_+$ :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_-(t) + \vec{r}_+(t).$$

В предельном случае слабого поля  $\Omega_L \ll \omega_0$

$$\omega_- \approx \omega_0 - \Omega_L, \quad \omega_+ \approx \omega_0 + \Omega_L,$$

т. е. движение можно рассматривать как вращение пространственного с частотой  $\Omega_L$ .

Этот результат является частным случаем теоремы Лармора о движении заряженных частиц в слабом магнитном поле:

*Движение (взаимодействующих) заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе в однородном магнитном поле  $\vec{H}$  в инерциальной системе отсчета  $OXYZ$  эквивалентно движению этих же частиц во вращающейся системе отсчета  $O'X'Y'Z'$  в отсутствие магнитного поля, если угловая скорость вращения  $\vec{\Omega}_L = e\vec{H}/2mc$  вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат, достаточно мала, так что для всех частиц выполняется соотношение  $[\vec{\Omega}_L \cdot \vec{r}_i] \ll \dot{r}_i$ .*

Рассмотрим систему частиц, взаимодействие которых друг с другом и с внешними полями описывается потенциальной энергией  $U(\vec{r}_i) = \sum_{i < j} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \sum_i U_i(\vec{r}_i)$ . Функция

Лагранжа такой системы имеет вид:

$$L = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_i).$$

Движение этой же системы в однородном магнитном поле  $\vec{H}$  может быть описано функцией Лагранжа  $L_1$ :

$$L_1 = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_i) + \frac{1}{2c} \sum_i e_i ([\vec{H} \cdot \vec{r}_i] \cdot \dot{\vec{r}}_i),$$

а движение в системе, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$  вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат (в отсутствие магнитного поля), - функцией  $L_2$ :

$$L_2 = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i'^2}{2} - U(\vec{r}_i) + \sum_i m_i ([\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i'] \cdot \dot{\vec{r}}_i') + \sum_i \frac{m_i [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i']^2}{2}.$$

Здесь учтена связь между скоростями частиц в лабораторной и движущейся системе:  $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)$ ,  $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}'(t) + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']$ .

Функциональная зависимость  $L_1(\dot{\vec{r}}_i, \vec{r}_i, t)$  и  $L_2(\dot{\vec{r}}_i', \vec{r}_i', t)$  одинакова, если угловая скорость вращения системы равна ларморовской частоте  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_L = e\vec{H}/2mc$ , а последнее слагаемое в  $L_2(\dot{\vec{r}}_i', \vec{r}_i', t)$ , пропорционально квадрату угловой скорости, пренебрежимо мало. Это и доказывает теорему.

Отсюда следует, что движение частиц с одинаковым отношением заряда к массе в слабом магнитном поле можно рассматривать как прецессию с частотой Лармора.

Полная энергия осциллятора в магнитном поле представляется как сумма энергий в каждой моде:  $E = E_+ + E_-$ , где  $E_{\pm} = mR_{\pm}^2(\omega_{\pm}^2 + \omega_0^2)$ . Это решение справедливо при любой величине магнитного поля. В сильном магнитном поле при  $\Omega_L \gg \omega_0$   $\omega_+ \rightarrow 2\Omega_L = \Omega$ , а  $\omega_- \rightarrow 0$ . В этом пределе  $E_+ \rightarrow mR_+^2\Omega^2/2$ , а  $E_- \rightarrow mR_-^2\omega_0^2/2$ .

Достаточно сильное магнитное поле способно сделать финитным даже движение в окрестности точки неустойчивого равновесия. Этот случай можно рассмотреть, проведя в уравнениях движения замену  $\omega_0^2 \rightarrow -\omega_0^2$ . В этом случае потенциальная энергия точки имеет максимум в начале координат, и в отсутствие магнитного поля частица экспонен-

циально быстро уходит из начала координат. Включение магнитного поля приводит к изменению характера движения. Решение характеристического уравнения в этом случае даст спектр вида  $\omega_{\pm} = \Omega_L \pm \sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2}$ . Колебательное решение существует при  $\Omega_L > \omega_0$ , то есть при  $H > 2\omega_0 m/e$ . Соотношение между комплексными амплитудами  $A^{\pm} = -iB^{\pm}$  для собственных частот  $\omega_{\pm}$  приводит к закону движения

$$\begin{aligned} x(t) &= R_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) + R_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+), \\ y(t) &= R_- \sin(\omega_- t + \varphi_-) + R_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+). \end{aligned}$$

Этим модам соответствуют энергии колебаний

$$E_+ = mR_+^2 \omega_+ \sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2} > 0 \quad \text{и} \quad E_- = -mR_-^2 \omega_- \sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Последнее выражение интересно тем, что уменьшение полной энергии частицы  $E_-$  сопровождается ростом амплитуды колебаний (радиуса окружности  $R_-$ ), что свидетельствует о неустойчивости этой моды.

Этот результат является общим для всех систем с гироскопическими силами. Пусть взаимодействие материальных точек допускает описание с помощью обобщенно-потенциальных сил

$$U = U^{(0)} + U^{(1)}.$$

Предположим также, что  $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ , т. е. связи в системе могут явно зависеть от времени или движение может описываться в неинерциальной системе отсчета. В этом случае кинетическая энергия имеет вид

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)},$$

и функция Лагранжа может содержать линейные по обобщенным скоростям члены.

Условие равновесия  $\left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{\dot{q}=0} = 0$  соответствует изолированному минимуму обобщенной энергии

$$H = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)}$$

и определяется условием

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_{\dot{q}=0} = 0.$$

Выберем обобщенные координаты так, чтобы точка  $q_s = 0$  была точкой равновесия (здесь мы рассматриваем относительное равновесие в обобщенных координатах  $q_s$ ).

Предположим, что, как и в случае потенциальных сил  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , т. е.  $H = H_0$  является интегралом, а  $T^{(2)}$  положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \geq 0.$$

В отношении разности  $\tilde{U}^{(0)} = U^{(0)} - T^{(0)}$ , входящей в обобщенную энергию, мы не будем делать такого предположения:

$$\tilde{U}^{(0)} = \frac{1}{2} c_{ik} q_i q_k.$$

Уравнения движения в данном случае имеют вид

$$m_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k + a_{ik} \dot{q}_k = 0. \quad (5.9)$$

Здесь

$$a_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i}$$

антисимметричная матрица, соответствующая выбранному положению равновесия, в которой  $A_i$  определяются уравнением:

$$\tilde{U}^{(1)} = U^{(1)} - T^{(1)} = A_i \dot{q}_i.$$

Будем искать решение системы (5.9) в виде

$$q_i = \mathfrak{C}_{i0} e^{i\omega t},$$

где  $\mathfrak{C}_{i0} = u_i + iv_i$  - комплексная амплитуда. Подстановка в уравнения движения приводит к системе уравнений для определения собственных частот (из условия существования нетривиальных решений

$$\det \left\| -\omega^2 m_{ik} + c_{ik} + i\omega a_{ik} \right\| = 0,$$

и коэффициентов  $\mathfrak{C}_{i0}$  - амплитуд:

$$-\omega^2 m_{ik} \mathfrak{C}_{k0} + c_{ik} \mathfrak{C}_{k0} + i\omega a_{ik} \mathfrak{C}_{k0} = 0. \quad (6.9)$$

Как и в случае потенциальных сил, общие свойства решений  $\omega$  можно исследовать, умножая (6.9) на сопряженную амплитуду  $\mathfrak{C}_{i0}^*$  и проводя суммирование по повторяющемуся индексу. Учитывая свойства билинейных форм, возникающих в уравнении

$$-\omega^2 m_{ik} \mathfrak{C}_{i0}^* \mathfrak{C}_{k0} + c_{ik} \mathfrak{C}_{i0}^* \mathfrak{C}_{k0} + i\omega a_{ik} \mathfrak{C}_{i0}^* \mathfrak{C}_{k0} = 0,$$

а именно для нетривиальных решений коэффициент

$$m = m_{ik} (u_i u_k + v_i v_k) > 0$$

в силу положительной определенности и симметрии матрицы  $m_{ik}$ . Действительная величина

$$c = c_{ik}(u_i u_k + v_i v_k)$$

в случае локального минимума обобщенной энергии положительна, а антисимметричная матрица  $a_{ik}$  порождает билинейную форму

$$i\omega a_{ik} \mathcal{C}_{i0}^* \mathcal{C}_{k0} = -2\omega a_{ik} u_i v_k = -2\omega a,$$

в которой  $a$  тоже оказывается действительной.

Таким образом, для любого нетривиального решения собственные частоты системы удовлетворяют уравнению

$$-m\omega^2 + c - 2a\omega = 0,$$

имеющему решения

$$\omega_{\pm} = -\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{c}{m}}.$$

Отсюда следует, что для любых  $a$  при  $c > 0$  решение носит колебательный характер. Более того, даже в случае  $c < 0$  когда в системе имеется локальный максимум обобщенной энергии, при выполнении соотношения  $a^2 > -mc$ , т. е. при достаточно больших гироскопических силах, движение остается колебательным. В этом проявляется стабилизирующее влияние гироскопические сил на систему.

Собственные векторы  $q_i^{(s)} = \mathcal{C}_{i0}^{(s)} e^{i\omega_s t}$ , соответствующие собственным частотам  $\omega_s$ , являются ортогональными, как и в случае потенциальных сил. Действительно, умножая (6.9) с  $\omega = \omega_s$  на  $\mathcal{C}_{i0}^{*(r)}$ , а соответствующее решение при  $\omega = \omega_r$  на  $\mathcal{C}_{i0}^{*(s)}$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\omega_s^2 m_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(s)} \mathcal{C}_{i0}^{*(r)} + c_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(s)} \mathcal{C}_{i0}^{*(r)} + i\omega_s a_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(s)} \mathcal{C}_{i0}^{*(r)} = 0, \\ -\omega_r^2 m_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(r)} \mathcal{C}_{i0}^{*(s)} + c_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(r)} \mathcal{C}_{i0}^{*(s)} + i\omega_r a_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(r)} \mathcal{C}_{i0}^{*(s)} = 0. \end{cases}$$

Напомним, что здесь всюду проведено суммирование по повторяющимся индексам. Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$-(\omega_s^2 m_{(rs)} - \omega_r^2 m_{(sr)}) + i(\omega_s a_{(rs)} - a_{(sr)} \omega_r) = 0.$$

Здесь мы ввели обозначение

$$m_{(rs)} = m_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(s)} \mathcal{C}_{i0}^{*(r)}, \quad a_{(rs)} = a_{ik} \mathcal{C}_{k0}^{(s)} \mathcal{C}_{i0}^{*(r)}.$$

Из симметрии матрицы  $m_{ik} = m_{ki}$ , следует, что  $m_{(rs)} = m_{(sr)}$ , а антисимметричность мат-

рицы  $a_{ik} = -a_{ki}$  приводит к условию

$$\omega_s a_{(rs)} - \omega_r a_{(sr)} = (\omega_s + \omega_r) a_{ik} u_i^{(r)} u_i^{(s)} = 0,$$

откуда  $m_{(rs)} = 0$  при  $r \neq s$ , а следовательно, и  $c_{(rs)} = 0$  при  $r \neq s$ .

Ортогональность решений позволяет записать обобщенную энергию в виде суммы

$$H = T^{(2)} - T^{(0)} + U^{(0)} = \sum_s H_s,$$

где

$$H_s = (c_s - a_s \omega_s) / 2.$$

Частоты удовлетворяют условию

$$m_s \omega_s^2 - c_s = -2a_s \omega_s,$$

поэтому для действительных собственных частот системы

$$\omega_+ = -\frac{a}{m} + \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{c}{m}},$$

энергия

$$H_+ = \frac{a^2}{2m} \sqrt{1 + \frac{mc}{a^2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{mc}{a^2}} + 1 \right] > 0$$

при любых значениях  $c$ , и положительных и отрицательных, если величина напряженности магнитного поля достаточна для стабилизации. Для собственных частот

$$\omega_- = -\frac{a}{m} - \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \frac{c}{m}}$$

знак энергии

$$H_- = \frac{a^2}{2m} \sqrt{1 + \frac{mc}{a^2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{mc}{a^2}} - 1 \right]$$

определяется знаком коэффициента  $c$ : если движение происходит вблизи локального максимума потенциальной энергии  $c > 0$ , то  $H_- > 0$ , а в случае движения в окрестности неустойчивого равновесия  $c < 0$  энергия, соответствующая таким модам колебаний, будет отрицательной  $H_- < 0$  (при выполнении условия стабилизации  $a^2 > -mc$ ).

Полученные могут быть полезны и в задачах об исследовании устойчивости движения, если они могут быть сведены к анализу устойчивости относительного равновесия во вращающихся системах отсчета. Такой подход мы рассмотрим на примере движения частиц в окрестности треугольных точек Лагранжа.

Рассмотрим круговую ограниченную задачу трех тел. Пусть две точечные массы

$m_1$  и  $m_2$  обращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Пробное тело массы  $m \ll m_{1,2}$  движется в гравитационном поле масс  $m_1$  и  $m_2$ , не влияя на их движение. Пусть расстояние между точками  $m_1$  и  $m_2$  равно  $l$  (рис. 2.9).

В инерциальной системе отсчёта  $Ox'y'$  движение точек вокруг общего центра масс происходит с угловой скоростью, определяемой из условия

$$m_2 \Omega^2 x_2 = G m_1 m_2 / l^2.$$

Координаты точек во вращающейся системе удовлетворяют условию

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0.$$

Учитывая, что  $x_2 - x_1 = l$  частоты обращения получим

$$\Omega^2 = \frac{GM}{l^3}, \text{ где } M = m_1 + m_2.$$

При этом

$$x_1 = -\frac{m_2}{M} l, \quad x_2 = \frac{m_1}{M} l.$$

Начало координат вращающейся системы совпадает с центром масс. Координаты точки  $x, y$  во вращающейся системе связаны с координатами инерциальной системы  $x', y'$  соотношениями

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

где  $\varphi = \Omega t$

Кинетическая энергия точки  $m$  имеет вид

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m \Omega^2}{2} (x^2 + y^2) + m \Omega (x \dot{y} - y \dot{x}), \quad (7.9)$$

а ее потенциальная энергия -

$$U = -\frac{G m m_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}} - \frac{G m m_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}}. \quad (8.9)$$

Функция Лагранжа содержит линейные по скоростям члены, которые во вращающейся системе  $OXY$  приводят к появлению гироскопических сил, поскольку слагаемые  $T^{(1)}$  и  $T^{(0)}$  в этой системе естественно интерпретируются как проявление сил инерции.

Положение равновесия относительно координат  $OXY$  определяется условием

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{\dot{x}=\dot{y}=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_{\dot{x}=\dot{y}=0} = 0,$$

что дает для положения равновесия

$$x_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{2}, \quad y_0 = \pm \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, в системе имеются точки, образующие равносторонний треугольник, такие, что пробное тело находится в них в положении относительного равновесия. Эти точки называются треугольными точками Лагранжа

Рассмотрим малые отклонения от положения равновесия. Пусть  $\xi = x - x_0$ ,  $\eta = y - y_0$  - малые отклонения от положения равновесия. Функция Лагранжа, приводящая к линейным уравнениям движения в переменных  $\xi, \eta$ , имеет вид

$$L = m \frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}{2} + m\Omega(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{m\Omega^2}{8}(3\xi^2 + 2p\xi\eta + 9\eta^2),$$

где введено обозначение  $p = 3\sqrt{3} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ .

Потенциальная энергия в точке  $\xi = 0, \eta = 0$  имеет максимум, так что относительное положение равновесия является неустойчивым.

Уравнения движения точки в плоскости  $OXY$  в линейном приближении имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\Omega\dot{\eta} - \frac{3\Omega^2}{4}\xi - \frac{p\Omega^2}{4}\eta = 0, \\ \ddot{\eta} - 2\Omega\dot{\xi} - \frac{9\Omega^2}{4}\eta - \frac{p\Omega^2}{4}\xi = 0. \end{cases} \quad (10.9)$$

Действие гироскопических сил, как отмечалось ранее, может стабилизировать движение. Для исследования этой возможности будем искать решения этих уравнений в виде

$$\xi = Ae^{i\omega t}, \quad \eta = Be^{i\omega t}.$$

Подставим эти выражения в (10.9) и получим систему уравнений для определенных коэффициентов:

$$\begin{cases} \left( \omega^2 + \frac{3}{4}\Omega^2 \right) A + \left( 2i\omega\Omega + \frac{p\Omega^2}{4} \right) B = 0, \\ \left( 2i\omega\Omega - \frac{p\Omega^2}{4} \right) A - \left( \omega^2 + \frac{9}{4}\Omega^2 \right) B = 0. \end{cases}$$

Условие существования нетривиального решения дает собственные значения  $\omega$ :



$$\omega_{\pm} = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{27m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}} \right)^{1/2}.$$

Колебательный режим возможен в случае, когда соотношение масс удовлетворяет условию

$$(m_1 + m_2)^2 > 27m_1m_2, \quad \frac{m_1}{m_2} < \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - 1} \cong \frac{1}{25}.$$

В частности, в системе Земля - Луна, если пренебречь влиянием Солнца, возможны колебания частиц вблизи треугольных точек Лагранжа. Подставляя значение отношения масс для этого случая  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{81}$ , получим возможные частоты колебаний

$$\omega_- \cong 0,299\Omega, \quad \omega_+ \cong 0,954\Omega.$$

Таким образом, движение относительно вращающейся системы координат вблизи рассматриваемой треугольной точки Лагранжа стабилизируется гироскопическими силами.

## 9.2. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Рассмотрим, наконец, влияние диссипативных тел на движение системы. В отличие от обобщенно - потенциальных сил их нельзя описать с помощью натуральной функции Лагранжа  $L = T - U$ , поэтому необходимо построить обобщенные диссипативные силы

$$Q_s^d = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}.$$

Диссипативные силы, такие как трение, направлены в сторону противоположную относительному движению тел, и могут как увеличивать, так и уменьшать энергию системы.

Рассмотрим простейший случай сил сопротивления, пропорциональных скорости движения точек:

$$\bar{F}_i = -k_i \dot{\bar{r}}_i, \quad k > 0.$$

В этом случае мощность диссипативных сил отрицательна:

$$W^d = \sum_i (\bar{F}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i) = -\sum_i k_i \dot{\bar{r}}_i^2 < 0,$$

что приводит к уменьшению энергии системы точек.

При использовании метода Лагранжа, однако, существует теорема об изменении обобщенной энергии, а не полной, поэтому в системе со связями, явно зависящими от времени, или при использовании обобщенных координат  $q_s$ , где явно включена зависи-

мость от времени  $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ , диссипативные силы не приводят обязательно к уменьшению обобщенной энергии:

$$\dot{E}^* = Q_s^d \dot{q}_s = -\sum_i k_i \dot{r}_i^2 + \sum_i k \dot{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

Для описания диссипативных сил рассматриваемого типа удобно использовать диссипативную функцию Рэлея  $2\Phi = -\rho_{is} \dot{q}_i \dot{q}_s$  где  $\rho_{ik}$  - симметричная матрица. Ограничимся далее анализом лишь тех сил, для которых диссипативная функция Рэлея отрицательна, а матрица  $\rho_{ik}$  - положительно определенная. В нашем случае это соответствует силам, пропорциональным скорости при условии, что преобразование к обобщенным координатам явно не содержит времени.

В приближении линейных уравнений движения положим  $\beta_{ik} = \rho_{ik}(0)$ , предполагая, что движение происходит лишь в окрестности начала координат. В этом случае обобщенные диссипативные силы

$$Q_s^d = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} = -b_{si} \dot{q}_i.$$

Рассмотрим вначале простейший пример - движение линейной системы с двумя степенями свободы с учетом сопротивления среды. Пусть система состоит из двух одинаковых материальных точек, соединенных пружинами, жесткость каждой из которых  $k$ . Точки могут двигаться вдоль оси  $q$  инерциальной системы. Предположим, что коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  характеризуют сопротивление среды, причем  $\beta_i = \frac{k_i}{m} > 0$ . Уравнения движения с учетом диссипативных сил имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\omega_0^2 q_1 - \omega_0^2 q_2 + \beta_1 \dot{q}_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + 2\omega_0^2 q_2 - \omega_0^2 q_1 + \beta_2 \dot{q}_2 = 0. \end{cases}$$

Здесь  $q$  - отклонения от положения равновесия. Используя полученные ранее результаты, введем нормальные координаты  $\theta_1 = q_1 + q_2$ , соответствующую синфазным колебаниям с частотой  $\omega = \omega_0$  и  $\theta_2 = q_1 - q_2$ , описывающую противофазные колебания, частота которых  $\omega = \omega_0 \sqrt{3}$ . Введенные координаты, диагонализующие полную энергию

$$E^* = E_1^* + E_2^*, \text{ где } E_s^* = E^*(\theta_s),$$

приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 + 2\gamma_1 \dot{\theta}_1 + 2\gamma_2 \dot{\theta}_2 = 0, \\ \ddot{\theta}_2 + 3\omega_0^2 \theta_2 + 2\gamma_1 \dot{\theta}_2 + 2\gamma_2 \dot{\theta}_1 = 0, \end{cases} \quad (11.9)$$

где  $\gamma_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{4}$ ,  $\gamma_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{4}$ .

Если система симметрична, т. е.  $\beta_1 = \beta_2$ , то  $\gamma_2 = 0$  и уравнения расцепляются. Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= Ae^{-\gamma_1 t} e^{i\omega_0 t}, \\ \theta_2(t) &= Be^{-\gamma_1 t} e^{i\sqrt{3}\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Асимметрия системы приводит к появлению перекрестных членов в уравнениях движения, так что в общем случае анализ становится довольно сложным. Для выяснения качественной стороны можно ограничиться случаем малого затухания. Предположим, что  $\gamma_1 \ll \omega_0$ , так что решение системы можно получить методом итераций. Предполагаем, что решение такой системы представимо в виде

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= Ae^{-\gamma_1 t + i\omega_0 t} + a(t), \\ \theta_2(t) &= Be^{-\gamma_1 t + i\sqrt{3}\omega_0 t} + b(t), \end{aligned}$$

где  $|a(t)| \ll |A|$ ,  $|b(t)| \ll |B|$  - малые поправки. Подставляя соотношения (12.9) в уравнения (11.9), в первом порядке по  $\gamma_i$  получим уравнения для определения  $a(t)$  и  $b(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{a} + \omega_0^2 a &= -2\gamma_2 B e^{i\omega_0 \sqrt{3}t}, \\ \ddot{b} + 3\omega_0^2 b &= -2\gamma_2 A e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений описывает вынужденные колебания под действием вынуждающей силы, которая пропорциональна соответствующей моде нормальных колебаний. Установившиеся колебания в системе:

$$\begin{aligned} a(t) &= +\frac{\gamma_2}{\omega_0^2} B e^{i\omega_0 \sqrt{3}t}, \\ b(t) &= -\frac{\gamma_2}{\omega_0^2} A e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Таким образом, влияние слабых диссипативных сил приводит к затуханию колебаний в каждой моде по экспоненциальному закону. В первом приближении в каждой моде колебаний появляются колебания с частотами, соответствующими и другим модам  $\omega_k \neq \omega_s$ , причем амплитуда этих колебаний пропорциональна коэффициенту  $\gamma_{sm}$ :

$$a_s \approx \gamma_{sm} A_m.$$

Этот вывод легко обобщается на случай произвольного числа свободы. Пусть диссипативная функция Рэля задается матрицей коэффициентов  $b_{sm}$ ,

$$2\Phi = -b_{sm} \dot{\theta}_s \dot{\theta}_m,$$

где  $\theta_s$  - нормальные координаты системы без затухания. При учете диссипативных сил в общем случае система уравнений принимает вид

$$\ddot{\theta}_s + \omega_{(s)}^2 \theta_s = -b_{sm} \dot{\theta}_m. \quad (13.9)$$

Полагая, как раньше,  $b_{sm} \ll \omega_{(s)}$ , используем метод итераций для решения уравнений, полагая, что решения представимы в виде

$$\theta_s = A_s e^{\frac{b_{ss}}{2} t + i\omega_{(s)} t} + a_s(t).$$

Ограничимся линейными по  $b_{sm}$  членами. Подставляя это решение в уравнения системы (13.9), получим уравнения для определения  $a_s$ :

$$a_s + b_{ss} \dot{a}_s + \omega_{(s)}^2 a_s = -\sum_{m \neq s} b_{sm} A_m e^{i\omega_{(s)} t}.$$

Мы выделили в сумме член с  $m = s$  и перенесли его в левую часть уравнения, чтобы исключить резонансные решения вида  $te^{i\omega t}$ , появление которых вызвано сделанными приближениями. С учетом сделанных замечаний решение имеет вид

$$a_s(t) = -i \sum_{m \neq s} \frac{b_{sm} \omega_{(m)} A_m}{\omega_s^2 - \omega_m^2} e^{i\omega_m t}$$

и описывает затухающие колебания в каждой моде.

Несколько сложнее обстоит дело с системами, в которых имеются гироскопические силы. Вновь рассмотрим движение заряда в однородном магнитном поле, учитывая теперь диссипативные силы. Уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\dot{x}\beta - \Omega_L \dot{y} = 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\dot{y}\beta + \Omega_L \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Здесь  $\Omega_L = eH/2mc$  - ларморовская частота,  $\omega_0^2 = k/m$ , а  $\beta > 0$  - затухание. Действие диссипативных сил приводит к изменению собственных частот системы, так что

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_L^2 - \beta^2 + 2i\beta\Omega_L} + \Omega_L + i\beta, \\ \omega_- &= \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_L^2 - \beta^2 - 2i\beta\Omega_L} - \Omega_L + i\beta. \end{aligned}$$

В случае малого затухания  $\beta \ll \Omega_L$  частоты системы удобно представлять в виде:

$$\omega_+ = \left( \sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2 - \beta^2} + \Omega_L \right) + i\beta \left( 1 + \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2}} \right),$$

$$\omega_- = \left( \sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2 - \beta^2} - \Omega_L \right) + i\beta \left( 1 - \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 + \omega_0^2}} \right).$$

Мнимая часть частот  $\omega_{\pm}$  положительна для любой моды при любых  $\Omega_L, \omega_0^2$ , так что действие диссипативных сил ( $\beta > 0$ ) всегда приводит к затуханию колебаний.

Для системы с неустойчивым положением равновесия при  $q = 0$  решения характеристического уравнения получаются заменой  $\omega_0^2 \rightarrow -\omega_0^2$ :

$$\omega_+ = \left( \Omega_L + \sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2 - \beta^2} \right) + i\beta \left( 1 + \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2}} \right),$$

$$\omega_- = \left( \Omega_L - \sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2 - \beta^2} \right) - i\beta \left( \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Omega_L^2 - \omega_0^2}} - 1 \right).$$

В режиме гироскопической стабилизации, когда  $\Omega_L > \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}$ , в системе без диссипации возможны колебательные решения, соответствующие финитному движению. Однако даже малое затухание ( $\beta > 0$ ) разрушает режим стабилизации, поскольку решение, содержащее  $\omega_-$ , экспоненциально нарастает. Рост амплитуды колебаний в этой моде сопровождается уменьшением энергии, так как

$$E_{неуст}^* < 0 \text{ и } \frac{\partial E_{неуст}^*}{\partial A} < 0.$$

Этот вывод, полученный при анализе простой модели, относится ко всем системам в режиме гироскопической стабилизации.

## Глава 10

### ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА

#### 10.1. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Описание движения механической системы с  $s$  степенями свободы с помощью канонических уравнений, или, как их называют, уравнений Гамильтона, производится в  $2s$ -мерном (фазовом) пространстве. Это связано с тем, что зачастую оказывается более удобным осуществить переход к системе  $2s$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени от  $s$  уравнений Лагранжа, но второго порядка по времени. Имеется в виду переход от  $s$  независимых переменных  $q_j$  к  $2s$  независимым переменным. Заметим, что в функции Лагранжа  $\mathcal{L}((q), (\dot{q}), t)$  величины  $q_j$  и  $\dot{q}_j$  не являются независимыми, поскольку  $\dot{q}_j$  является производной  $q_j$  по времени.

Простейший путь перехода к независимым переменным, очевидно, состоит в том, чтобы ввести  $s$  новых переменных  $x_j$  согласно соотношениям

$$\dot{q}_j = x_j. \quad (1.10)$$

Эти  $s$  соотношений можно рассматривать как систему  $s$  дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих между собой  $2s$  переменных  $q_j$  и  $x_j$ . Но теперь функция Лагранжа зависит от  $q_j, x_j$ , а уравнения Лагранжа формально имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.10)$$

Уравнения (1.10) и (2.10) образуют систему  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка.

Движение механической системы теперь изображается кривой в  $2s$ -мерном пространстве  $x_j, q_j$ . Удобно вместо  $q_j, x_j$  ввести совокупность переменных  $q_j, p_j$ , в которых уравнения движения системы приобретут более симметричный вид. Этого можно достичь, если в качестве переменной  $x_j$  использовать обобщенный импульс

$$p_j = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (3.10)$$

Регулярный способ описанных преобразований состоит в переходе от переменных  $q_j, \dot{q}_j, t$  к переменным  $q_j, p_j, t$ , с помощью преобразований Лежандра. Задача формулируется следующим образом. От функции  $\mathcal{L}((q), (\dot{q}), t)$ , зависящей от  $q_j, \dot{q}_j, t$  перейти к функции  $\mathcal{H}((q), (p), t)$  зависящей от  $q_j, p_j, t$ , причём “новые переменные”

$p_j$  выражаются через “старую функцию”  $\mathcal{L}$  с помощью (3.10). Вычислим дифференциал

$$d\mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (4.10)$$

и введем функцию  $\mathcal{H}((q), (p), t)$  посредством

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}, \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5.10)$$

Найдем полный дифференциал

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \\ &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^s \left( \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Но  $p_j$  определяются из (3.10), так что, выражая из них  $\dot{q}_j$  через  $q_j, p_j, t$ , видим, что  $\mathcal{H}$  действительно является функцией  $(q), (p), t$ . Функция  $\mathcal{H}((q), (p), t)$  называется функцией Гамильтона или гамильтонианом механической системы. Это та же обобщенная энергия, но в ней все обобщенные скорости заменены обобщенными импульсами. Зная эту функцию, можно вывести канонические уравнения. Для этого найдем  $d\mathcal{H}$ , считая  $\mathcal{H}$  функцией  $(q), (p), t$ :

$$d\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt, \quad (7.10)$$

и сравним (6.10) с (7.10). Так как левые части обеих формул представляют собой полные дифференциалы одной и той же функции, их правые части также должны совпадать. При независимых  $q_j, p_j$  для этого должны выполняться

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (8.10)$$

Воспользуемся определением (3.10) и уравнениями Лагранжа, записанными в форме

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j},$$

и подставим  $\dot{p}_j$  из этого уравнения вместо  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$  в (8.10). Тогда получим симметричные (с

точностью до знака) уравнения движения механической системы в фазовом пространстве, которые определяются с помощью функции Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (9.10)$$

Это и есть уравнения Гамильтона. Они представляют собой систему  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка по времени относительно переменных  $q_j, p_j$ .

Полезно помнить следующий алгоритм составления этих уравнений:

- 1) построить функцию Лагранжа системы;
- 2) найти “новые переменные” - канонические импульсы - по формулам (3.10);
- 3) построить функцию Гамильтона  $\mathcal{H}((q), (p), t)$ ;
- 4) подставить функцию Гамильтона в уравнения (9.10).

В процедуре перехода от переменных  $(q), (\dot{q}), t$  к  $(q), (p), t$  часть переменных заменяется новыми переменными ( $(\dot{q})$  на  $(p)$ ), другая часть не меняется. Первую группу переменных называют активными, вторую - пассивными переменными. Время  $t$ , разумеется, не является динамической переменной и рассматривается формально как пассивная переменная. Заметим, что соотношения для переменных, которые не преобразовываются, будут аналогичны соотношению для “пассивной переменной”  $t$ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.10)$$

Действительно, первые  $s$  соотношений нетрудно получить, сравнивая две системы уравнений:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Последнее замечание касается “дуальной природы” преобразований Лежандра. Она отражается в следующих уравнениях:

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \\ \mathcal{H} &= \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - \mathcal{H}, \\ \mathcal{H} &((q), (p), t), \quad \mathcal{L}((q), (\dot{q}), t). \end{aligned}$$

Видно, что “новые” переменные  $p_j$  выражаются через “старую” функцию  $\mathcal{L}$  так же, как “старые” переменные  $\dot{q}_j$  - через “новую” функцию  $\mathcal{H}$ . Иными словами, исходя из  $\mathcal{L}$  с помощью указанных выше трёх операций можно построить  $\mathcal{H}$ . Но точно так же можно начать с функции Гамильтона  $\mathcal{H}$  и тремя последовательными операциями построить  $\mathcal{L}$ .



## 10.2. ВЫВОД КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Поскольку формализм, базирующийся на функции Гамильтона широко применяется в разных областях теоретической физики представляется необходимым показать, как уравнения Гамильтона могут быть выведены из общих вариационных (интегральных) принципов. Фактически это будет означать, что вся динамика механической системы определяется одной функцией - её гамильтонианом. Для доказательства этого положения можно воспользоваться принципом Гамильтона- Остроградского, введя некоторые изменения в подынтегральное выражение (60.7).

Подставим в (60.7) следующее выражение функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \quad (11.10)$$

и запишем принцип Гамильтона-Остроградского в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt = 0, \quad (12.10)$$

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0. \quad (13.10)$$

Это — вторая форма принципа Гамильтона - Остроградского, или модифицированный принцип Гамильтона. Он гласит:

*Реальное движение механической системы, состояние которой определяется каноническими переменными,  $q_j, p_j, j=1, 2, \dots, s$ , осуществляется таким образом, что первая вариация функционала  $S$  обращается в нуль при условиях (13.10).*

Рассмотрим вариацию  $S$ , полагая, что все входящие в  $S$  канонические переменные являются независимыми:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s (\dot{q}_j \delta p_j + p_j \delta \dot{q}_j) - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j \right) \right\} dt = \\ &= \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s \delta p_j \left( \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) - \delta q_j \left( \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$ , и проинтегрировали по частям члены, содержащие  $\delta \dot{q}_j$ . Согласно (12.10) и (13.10)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s \left[ \delta p_j \left( \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) - \delta q_j \left( \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \right] \right\} dt = 0. \quad (14.10)$$

Но так как все вариации  $\delta q_j$ ,  $\delta p_j$  независимы и произвольны, (14.10) удовлетворяется, если только коэффициенты при всех  $\delta q_j$  и  $\delta p_j$  будут равны нулю, т. е.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Тем самым доказано, что канонические уравнения можно вывести из модифицированного принципа Гамильтона.

Подчеркнем, что требование независимости групп переменных  $(q)$  и  $(p)$  здесь было весьма существенным. Обобщенные импульсы  $p_j$  в методе Гамильтона считаются такими же независимыми переменными, как и обобщенные координаты;  $p_j$  связаны с  $q_j$  только уравнениями движения, т. е. динамически, а не кинематически, т. е. заранее заданными соотношениями, как, скажем,  $\dot{q}_j$  связаны с  $q_j$ . Мы видим, что ни одна из групп переменных  $(q)$  и  $(p)$  не рассматривается здесь как основная. Обе группы независимы. Причем, только увеличив число переменных с  $s$  до  $2s$ , можно получить уравнения первого порядка по времени.

### 10.3. ИНТЕГРАЛЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. СКОБКИ ПУАССОНА. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Рассмотрим некоторую функцию канонических переменных  $(q), (p)$  и времени  $f((q), (p), t)$  и поставим вопрос о том, когда эта функция будет обращаться в постоянную в силу уравнений движения (9.10), т. е. будет интегралом гамильтоновой системы. Вычислим полную производную  $f$  по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right). \quad (15.10)$$

Подставляя в (15.10) вместо  $\dot{q}_j$  и  $\dot{p}_j$  правые части (9.10), получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}], \quad (16.10)$$

где

$$[f, \mathcal{H}] = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right). \quad (17.10)$$

Последнее выражение называют скобками Пуассона для величин  $f$  и  $\mathcal{H}$ . Условие того, что величина  $f$  есть интеграл движения, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}] = 0. \quad (18.10)$$

Если же  $f$  явно от времени не зависит, то, для того чтобы функция канонических переменных  $f((q), (p))$  была бы интегралом движения, скобки Пуассона  $f$  с функцией Гамильтона  $\mathcal{H}$  данной механической системы должны обращаться в нуль:

$$[f, \mathcal{H}] = 0. \quad (19.10)$$

Скобки Пуассона можно определить для любой пары величин  $u, v$  зависящих от  $(q), (p), t$ :

$$[u, v] = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right). \quad (20.10)$$

Используя это определение, нетрудно доказать следующие свойства:

- 1)  $[u, v] = -[v, u]$ ;
- 2)  $[u, c] = 0$ , где  $c$  – постоянная функция, не зависящая от  $(q), (p)$ ;
- 3)  $[u, u] = 0$ ;
- 4)  $[u + v, w] = [u, w] + [v, w]$ ;
- 5)  $[uv, w] = u[v, w] + v[u, w]$ ;
- 6)  $\frac{\partial}{\partial t}[u, v] = \left[ \frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \left[ u, \frac{\partial v}{\partial t} \right]$ .

Можно ввести понятие фундаментальных скобок Пуассона. Для этого положим одну из функций  $u$  или  $v$  равной  $q_i$  или  $p_i$ . Тогда

$$[q_i, v] = \sum_{j=1}^s \delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial p_j} = \frac{\partial v}{\partial p_i}, \quad (21.10)$$

$$[p_i, v] = -\sum_{j=1}^s \delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial q_j} = -\frac{\partial v}{\partial q_i}. \quad (22.10)$$

Положим теперь в (21.10)  $v = q_i$ , и  $v = p_i$ , а в (22.10)  $v = p_i$ . Получаем

$$[q_i, q_j] = 0, [q_i, p_j] = \delta_{ij}, [p_i, p_j] = 0. \quad (23.10)$$

Соотношения (23.10) называют фундаментальными скобками Пуассона<sup>1)</sup>.

Скобки Пуассона позволяют по-иному записать уравнения Гамильтона. В самом деле, пусть в (21.10), (22.10)  $v = H$ . Тогда вместо (21.10), (22.10) получим

$$[q_i, \mathcal{H}] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \dot{q}_i = [q_i, \mathcal{H}], \quad (24.10)$$

$$[p_i, \mathcal{H}] = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \dot{p}_i, \quad \dot{p}_i = [p_i, \mathcal{H}]. \quad (25.10)$$

Уравнения (24.10), (25.10), очевидно, являются уравнениями Гамильтона, записанными с помощью скобок Пуассона. Они являются частными случаями равенства (16.10), в котором в качестве  $f$  выбирается либо  $q_i$ , либо  $p_i$ . Положим в (16.10)  $f = \mathcal{H}$ . Получим

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (26.10)$$

Следовательно, если  $\mathcal{H}$  не зависит от времени явно, то Гамильтониан механической системы является интегралом движения.

Можно показать, что между скобками Пуассона, составленными из трёх функций  $u$ ,  $v$  и  $w$ , существует соотношение

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (27.10)$$

называемое тождеством Якоби.

Одним из важных свойств скобок Пуассона является возможность получения интеграла движения – скобки Пуассона  $[u, v]$ , если  $u$  и  $v$  – интегралы движения. Это утверждение составляет содержание теоремы Пуассона. Докажем эту теорему. Вычислим полную производную по  $t$  от  $[u, v]$ :

$$\frac{d[u, v]}{dt} = \frac{\partial [u, v]}{\partial t} + [[u, v], \mathcal{H}] \quad (28.10)$$

и воспользуемся тождеством Якоби, приводя (28.10) к виду

$$\frac{d[u, v]}{dt} = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + [u, \mathcal{H}], v \right] + \left[ u, \frac{\partial v}{\partial t} + [v, \mathcal{H}] \right]. \quad (29.10)$$

---

<sup>1)</sup> В квантовой механике соотношение  $\frac{i}{\hbar} \{u, v\}$ , где  $u, v$  – операторы физических величин,  $\hbar$  – постоянная Планка, называют коммутационными соотношениями. Они определяются как  $\frac{i}{\hbar} (uv - vu)$ . Коммутационные или перестановочные соотношения для операторов  $q, p$  введены Гейзенбергом. Процедура так называемого канонического квантования состоит в переходе от фундаментальных

Но если  $u$  и  $v$  - интегралы движения, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u, \mathcal{H}] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + [v, \mathcal{H}] = 0. \quad (30.10)$$

Следовательно,  $\frac{d}{dt}[u, v] = 0$ , что и требовалось доказать.

Мы видели, что полная производная по времени любой функции  $F(q(t), p(t))$  канонических переменных  $q, p$ , которая не зависит от времени явно, определяется равенством

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] \quad (31.10)$$

Покажем, что значение  $F(q(t), p(t))$  в момент времени  $t$  выражается через значение  $F(q(0), p(0))$  в момент времени  $t = 0$  следующей формулой:

$$\begin{aligned} F(q(t), p(t)) &= F(0) + \frac{t}{1!} [F, \mathcal{H}] \Big|_{t=0} + \frac{t^2}{2!} [[F, \mathcal{H}], \mathcal{H}] \Big|_{t=0} + \dots = \\ &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[[\dots [F, \mathcal{H}], \mathcal{H}] \dots] \mathcal{H}}_n \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (32.10)$$

где  $q(t), p(t)$  удовлетворяют каноническим уравнениям, описывающим эволюцию механической системы, гамильтониан которой  $\mathcal{H}(q, p)$  явно от времени не зависит;  $F(0) = F(q(0), p(0))$ . Ряд в правой части (32.10) предполагается сходящимся.

Доказательство проводится непосредственно подстановкой решения (32.10) в (31.10), в результате которой (31.10) будет удовлетворяться тождественно.

Приведенная формула интересна тем, что на основе её аналога строится теория возмущений в квантовой теории. В задачах теоретической механики использование этой формулы не всегда дает наиболее простой путь решения задачи, однако она эффективна для нахождения приближенного решения в задачах, где можно выделить малый параметр.

В качестве примера рассмотрим, однако, простую точно решаемую задачу. Найдем  $q(t), p(t)$  в задаче гармонического осциллятора. Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Положим  $F(q(t), p(t)) = q(t)$  и вычислим скобки Пуассона:

$$[q, \mathcal{H}] \Big|_{t=0} = \frac{p}{m}, \quad [[q, \mathcal{H}], \mathcal{H}] \Big|_{t=0} = -\omega^2 q,$$

$$\left[ \left[ [q, \mathcal{H}], \mathcal{H} \right], \mathcal{H} \right]_{t=0} = -\frac{\omega^2 p}{m} \dots$$

Очевидно, в этом примере правая часть формулы (32.10) легко восстанавливается:

$$\begin{aligned} q(t) &= q + \frac{p}{m} t - \frac{q\omega^2}{2} t^2 - \frac{p}{m} \omega^2 \frac{t^3}{3!} + \dots = \\ &= q \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \dots \right) + \frac{p}{m\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^2 t^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (33.10)$$

Функции  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  мы восстановили по первым двум членам их разложений.

Аналогично, полагая  $F(q(t), p(t)) = p(t)$  и вычисляя скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [p, H]_{t=0} &= -\omega^2 m q, & [[p, H], H]_{t=0} &= -\omega^2 p, \\ [[[p, H], H], H]_{t=0} &= \omega^4 m q, & [[[[p, H], H], H], H]_{t=0} &= \omega^4 p, \end{aligned}$$

для  $p(t)$  получим

$$\begin{aligned} p(t) &= p - \frac{m\omega^2 q}{1!} t - \frac{\omega^2 p}{2!} t^2 + \frac{m\omega^4 q}{3!} t^3 + \frac{\omega^4 p}{4!} t^4 + \dots = \\ &= p \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \dots \right) - m\omega \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= p \cos \omega t - m\omega \sin \omega t. \end{aligned} \quad (34.10)$$

Формулы (33.10) и (34.10) определяют состояние системы в момент времени  $t$ , т. е. представляют собой решения канонических уравнений для гармонического осциллятора.

#### 10.4. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Преимущество метода Гамильтона по сравнению с методом Лагранжа заключается в том, что в нем обобщённые координаты и обобщённые импульсы выступают равноправно и поэтому метод Гамильтона предоставляет значительно больше возможностей выбора величин, которые принимаются за “координаты” и “импульсы”. Тем самым вырабатываются более абстрактные формы изложения основных положений теоретической механики. Мощные теоремы в теории устойчивости движения нелинейных систем (Ляпунова, Колмогорова, Арнольда, Мозера) были доказаны на основе уравнений первого порядка по времени, т. е. уравнений, близких к гамильтоновым. Наконец, методы гамильтоновой динамики оказываются чрезвычайно полезными при построении других физических теорий, где они и сейчас играют фундаментальную роль.

Фактически эти методы явились исходными пунктами при построении квантовой механики, квантовой теории поля, статистической механики.

Во всех этих проблемах значительное место занимают канонические преобразования. Так, можно заметить, что уравнения Гамильтона обладают важным и интересным свойством: они сохраняют свой вид, т. е. являются ковариантными при таких преобразованиях переменных  $(q)$  и  $(p)$ , которые уже не являются точечными преобразованиями. Этот более широкий класс преобразований называют каноническими преобразованиями.

*Определение. Каноническими преобразованиями называют такие преобразования канонических переменных  $(q)$ ,  $(p)$ , которые не изменяют общего вида канонических уравнений*

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (35.10)$$

для любой гамильтоновой системы.

Иными словами, если перейти к описанию движения системы новыми переменными

$$Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \quad P_j = P_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \quad (36.10)$$

то в этих переменных уравнения Гамильтона сохраняют свой вид:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j}, \quad (37.10)$$

где  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(Q, P)$  — “новая” функция Гамильтона. Относительно функций  $Q_j, P_j$  предполагается, что они однозначные и имеют непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным. Поэтому якобиан преобразований (36.10) должен быть отличным от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & \frac{\partial Q_s}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial p_s} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_s} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial p_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_s}{\partial q_s} & \frac{\partial P_s}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_s}{\partial p_s} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \neq 0. \quad (38.10)$$

Важную роль в канонических преобразованиях играет производящая функция, которая может зависеть от переменных  $(q), (p), (Q), (P)$ . Всего таких переменных  $4s$ .

Независимых переменных, однако,  $2s$ , так как  $2s$  переменных можно выразить через  $2s$  независимых по формулам (36.10). В производящую функцию входят независимые переменные, причем обязательно должно быть  $s$  “старых” и  $s$  “новых” переменных. Следовательно, всего может быть только четыре вида производящих функций преобразования:  $F_1(q, Q)$ ,  $F_2(q, P)$ ,  $F_3(p, Q)$ ,  $F_4(p, P)$ .

Переменные  $Q_j$ ,  $P_j$  так же, как и  $q_j$ ,  $p_j$  являются каноническими в том смысле, что уравнения Гамильтона сохраняют свой вид в этих переменных. Это накладывает определенные ограничения на преобразования переменных, и встает вопрос о необходимых и достаточных условиях “каноничности преобразований”.

Очевидно, для того чтобы динамика механической системы в переменных  $q_j$ ,  $p_j$  определялась уравнениями (35.10), а в переменных  $Q_j$ ,  $P_j$  - уравнениями (37.10), нужно потребовать, чтобы и уравнения (35.10), и уравнения (37.10) выводились из модифицированного принципа Гамильтона, т. е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' \right\} dt = 0, \quad (39.10)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right\} dt = 0. \quad (40.10)$$

Какое-либо из этих соотношений можно умножить на произвольную постоянную  $C$  (обычно умножают (40.10)), не меняя самих соотношений. Эта постоянная определяет так называемую валентность преобразования. Если  $C = 1$ , то преобразование называют унивалентным. Поскольку наличие постоянной  $C$  не влияет существенно на общие выводы, будем полагать ее равной единице.

Напомним, что (39.10) выполняется в конфигурационном пространстве  $(Q)$ , а (40.10) - в пространстве  $(q)$ , поэтому подынтегральное выражение в (39.10) определено с точностью до полной производной по времени  $\Phi(Q, q, t)$ , а подынтегральное выражение в (40.10) определено с точностью до  $\tilde{\Phi}(q, Q, t)$ . С учётом этого, приравнявая (39.10) и (40.10), получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' \right) + \frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} \right\} dt, \quad (41.10)$$

где

$$F_1(q, Q, t) = \Phi(Q, q, t) - \tilde{\Phi}(q, Q, t). \quad (42.10)$$



Формула (41.10) выражает необходимое и достаточное условие каноничности преобразования. Из нее можно получить формулы канонического преобразования, которое определяется производящей функцией  $F_1(q, Q, t)$ . Для этого вычислим  $\frac{dF_1}{dt}$  и запишем подынтегральное выражение в виде

$$\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (43.10)$$

Приравнявая коэффициенты при  $\dot{q}_j$ ,  $\dot{Q}_j$  получаем

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad (44.10)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \quad (45.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (46.10)$$

Это и есть формулы канонического преобразования, определяемые функцией  $F_1(q, Q, t)$ . Практическая их значимость заключается в следующем. Задав производящую функцию преобразования  $F_1(q, Q, t)$  и разрешая соотношение (44.10), можно получить явный вид функций  $Q_j((q), (p))$ . Из (45.10), подставляя найденные  $Q_j((q), (p))$  получим  $P_j((q), (p))$ . Наконец, подставляя в (46.10)  $q_j((Q), (P))$ ,  $p_j((Q), (P))$ , найдём новый гамильтониан  $\mathcal{H}'((Q), (P))$ .

Заметим, что уравнение (41.10) является основным в теории канонических преобразований и может быть принято за их определение. Тогда можно доказать, что при переходе к переменным  $Q_j$ ,  $P_j$ , которые определяются формулами (44.10)-(46.10), гамильтонова форма уравнений движения сохраняется. **Этот способ изложения обратен приведенному здесь.**

Формулы преобразований, определяемых производящими функциями  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$ ,  $F_4(p, P, t)$ , можно получить, воспользовавшись преобразованиями Лежандра.

Рассмотрим преобразование с функцией  $F_2(q, P, t)$ . Поскольку  $F_1$  зависит от  $(q)$ ,  $(Q)$ , а  $F_2$  - от  $(q)$ ,  $(P)$ , причём  $-P_j = \frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$ , то для получения формул искомого преобразования можно воспользоваться соотношением (43.10), выражая в нём  $F_1$  через  $F_2$  согласно

$$F_1 = F_2 - \sum_{j=1}^s P_j Q_j. \quad (47.10)$$

Иными словами, как и в преобразовании Лежандра, мы переходим от переменных  $(q)$ ,  $(Q)$ ,  $t$ , к переменным  $(q)$ ,  $(P)$ ,  $t$ , таким, что  $P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}$ . Подставляя (47.10) в (43.10),

получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - H' + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \\ + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_{j=1}^s (P_j \dot{Q}_j + Q_j \dot{P}_j). \end{aligned} \quad (48.10)$$

Отсюда следуют формулы преобразования

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad (49.10)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad (50.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (51.10)$$

Точно так же, используя (43.10) и рассматривая задачу как переход от переменных  $(q)$ ,  $(Q)$ ,  $t$ , к переменным  $(p)$ ,  $(Q)$ ,  $t$ , при котором  $p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}$ , можно получить формулы канонического преобразования, определяемого производящей функцией  $F_3((p), (Q), t)$ . Нетрудно видеть, что в этом случае

$$F_1 = F_3 + \sum_{j=1}^s p_j q_j \quad (52.10)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - H' + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_3}{\partial q_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \\ + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^s (p_j \dot{q}_j + q_j \dot{p}_j). \end{aligned} \quad (53.10)$$

Из (53.10) находим

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad (54.10)$$

$$P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \quad (55.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (56.10)$$

Наконец, преобразование, осуществляемое производящей функцией  $F_4((p), (P), t)$ , можно получить используя (43.10) и рассматривая переход от  $(q), (Q), t$  к  $(p), (P), t$  с помощью так называемого двойного преобразования Лежандра, так как

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}.$$

Поэтому

$$F_1 = F_4 + \sum_{j=1}^s (p_j q_j - P_j Q_j) \quad (57.10)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - H' + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_4}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \dot{P}_j \right) + \\ + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum_{j=1}^s (p_j \dot{q}_j + \dot{p}_j q_j - P_j \dot{Q}_j - \dot{P}_j Q_j). \end{aligned}$$

Формулы канонического преобразования, определяемого производящей функцией  $F_4$ , очевидно, таковы:

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad (58.10)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}, \quad (59.10)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (60.10)$$

Заметим, что во всех случаях формула преобразования гамильтониана одинакова:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

### Примеры канонических преобразований

1. *Тождественное преобразование.* Рассмотрим каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией  $F_2 = \sum_{i=1}^s q_i P_i$ . Из формул (49.10)-(51.10) находим

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^s \delta_{ij} P_i = P_j, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j. \quad (61.10)$$

Видно, что это действительно тождественное преобразование.

2. *Преобразование, меняющее местами координаты и импульсы (инверсия).* Пусть

преобразование задается производящей функцией

$$F_1 = \sum_{i=1}^s q_i Q_i .$$

Из (44.10)-(46.10) имеем

$$p_j = Q_j, P_j = -q_j, \mathcal{H}' = \mathcal{H} .$$

### 3. Точечные преобразования, рассматриваемые с точки зрения канонических.

Пусть производящая функция канонического преобразования

$$F_2 = \sum_{j=1}^s f_j(q_1, \dots, q_s, t) P_j . \quad (62.10)$$

Из (49.10)-(51.10) получаем

$$Q_j = f_j(q_1, \dots, q_s, t),$$

а это и есть точечные преобразования.

Одним из важных приложений теории канонических преобразований является возможность приведения гамильтониана к такому виду, что задача интегрирования канонических уравнений может стать существенно проще исходной. Например, если “новый” гамильтониан не зависит от какой-то координаты, то “новый” импульс, соответствующий этой координате, является константой, что упрощает общую задачу интегрирования канонических уравнений. Заманчива мысль построить такое преобразование, чтобы новый гамильтониан вообще не содержал новых координат, т. е. чтобы все новые координаты являлись циклическими. Продемонстрируем такую возможность на примере гармонического осциллятора.

Гамильтониан осциллятора в канонических переменных имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} .$$

Проведем каноническое преобразование, производящую функцию которого выберем в виде

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega^2 q^2}{2} \operatorname{ctg} Q .$$

Это функция вида  $F_1(q, Q)$ . Формулы преобразования с  $F_1$ :

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q ,$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} .$$

Отсюда

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} = P\omega = E_0.$$

Обобщённая координата  $Q$  является циклической, импульс  $P = \frac{E_0}{\omega}$  - константа движения, причём

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P} \omega.$$

Интегрирование этих уравнений по времени тривиально

$$Q = \omega t + Q_0.$$

Решение в старых координатах дает закон движения гармонического осциллятора, полученный выше:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0).$$

## 10.5. СКОБКИ ПУАССОНА - ИНВАРИАНТЫ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Важным свойством скобок Пуассона является инвариантность относительно канонических преобразований. Докажем это. Пусть даны скобки Пуассона в переменных  $q, p$

$$[u, v]_{q, p} = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right). \quad (63.10)$$

Покажем, что скобки Пуассона

$$[u, v]_{Q, P} = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial Q_j} \frac{\partial v}{\partial P_j} - \frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial v}{\partial Q_j} \right)$$

при условии, что  $Q_j$  и  $P_j$  получены в результате преобразования, удовлетворяют соотношению

$$[u, v]_{Q, P} = [u, v]_{q, p}. \quad (64.10)$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial Q_j} &= \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right), \\
\frac{\partial u}{\partial P_j} &= \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial P_j} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \right), \\
\frac{\partial v}{\partial P_j} &= \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial P_j} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \right), \\
\frac{\partial v}{\partial Q_j} &= \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right)
\end{aligned} \tag{65.10}$$

и

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k,k'=1}^s \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial q_{k'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial P_j} + \frac{\partial v}{\partial p_{k'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial P_j} \right) - \right. \\
&\left. - \left( \frac{\partial u}{\partial q_{k'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial P_j} + \frac{\partial u}{\partial p_{k'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial P_j} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{66.10}$$

Пусть, например, каноническое преобразование задается с помощью функции  $F_2((q), (P))$ . Тогда  $p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$ ,  $Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}$ , а  $\frac{\partial p_k}{\partial Q_j} = 0$ , так как  $F_2((q), (P))$  не зависит от  $Q_j$ . Кроме того, очевидно,

$$\frac{\partial p_k}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_j \partial q_k} \equiv a_{jk} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}.$$

С учетом этих равенств, замечая, что индексы суммирования  $k, k'$  можно переобозначить, нетрудно получить из (66.10)

$$\begin{aligned}
[u, v]_{Q, P} &= \sum_{j,k,k'=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_{k'}} \right) \frac{\partial q_{k'}}{\partial Q_j} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} = \\
&= \sum_{k,k'=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_{k'}} \right) \delta_{k'k} = [u, v]_{q, p}.
\end{aligned} \tag{67.10}$$

Свойство инвариантности доказано.

## 10.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПУАНКАРЕ

Инвариантами канонических преобразований кроме скобок Пуассона являются, и так называемые интегральные инварианты Пуанкаре. На этот счёт имеется следующая

Теорема Пуанкаре. *Интеграл*

$$J_1 = \iint_S \sum_{j=1}^s dq_j dp_j$$

является инвариантом любого канонического преобразования. Здесь  $S$  - произвольная двумерная поверхность в фазовом пространстве размерности  $2s$ .

Доказать эту теорему рекомендуется самостоятельно. Мы наметим здесь лишь одну из возможных схем доказательства. Положение точки на двумерной поверхности определяется двумя параметрами. Пусть на поверхности  $S$  такими параметрами будут  $\xi$  и  $\eta$ . Тогда  $q_j = q_j(\xi, \eta)$ ,  $p_j = p_j(\xi, \eta)$ . Связь между элементами площади  $dq_j dp_j$  и  $d\xi d\eta$  определяется якобианом

$$\frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial \xi} & \frac{\partial p_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial q_j}{\partial \eta} & \frac{\partial p_j}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (68.10)$$

и имеет вид

$$dq_j dp_j = \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (69.10)$$

Произведем каноническое преобразование от переменных  $(q), (p)$  к переменным  $(Q), (P)$ . Утверждение теоремы записывается в виде

$$\iint_S \sum_{j=1}^s dq_j dp_j = \iint_S \sum_{i=1}^s dQ_i dP_i \quad (70.10)$$

или в эквивалентной форме

$$\iint_S \sum_{j=1}^s \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \iint_S \sum_{i=1}^s \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (71.10)$$

Но так как область интегрирования является здесь произвольной, (71.10) выполняется, если только равны якобианы

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial(q_j, p_j)}{\partial(\xi, \eta)} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(\xi, \eta)}. \quad (72.10)$$

Поэтому доказательство инвариантности  $J_1$  эквивалентно доказательству инвариантности сумм якобианов. Далее нужно взять какую-либо производящую функцию канонического преобразования, скажем,  $F_2((q), (P), t)$ , и, выразив  $p_j$  и  $Q_j$  через производные от  $F_2$ , нетрудно доказать равенство якобианов.

Оказывается, что можно построить целую последовательность интегральных инвариантов

$$J_2 = \iiint_S \sum_{j,k=1, j \neq k}^s dq_j dp_j dq_k dp_k.$$

Здесь  $S$  — произвольная четырехмерная поверхность фазового пространства и т. д. И

наконец,

$$J_s = \iint_{V'} \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s.$$

В  $J_s$  интегрирование проводится по произвольной области фазового пространства (как говорят, по объему фазового пространства).

## 10.7. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим канонические преобразования вида

$$Q_j = q_j + \delta q_j, \quad P_j = p_j + \delta p_j, \quad (73.10)$$

где  $\delta q_j$ ,  $\delta p_j$  - конечные, непрерывные функции обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени, бесконечно малые по сравнению с  $|q_j|$  и  $|p_j|$  соответственно. Подчеркнем, что  $\delta q_j$  и  $\delta p_j$  являются приращениями  $q_j$  и  $p_j$ , а не их вариациями.

Канонические преобразования, задаваемые формулой (73.10), называют бесконечно малыми или, инфинитезимальными каноническими преобразованиями. Ясно, что (73.10) могут быть построены с помощью производящей функции, близкой к функции тождественного канонического преобразования

$$F_2(q, P) = \sum_{j=1}^s q_j P_j + \varepsilon \tilde{F}_2(q, P, t), \quad (74.10)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр.  $\tilde{F}_2$  будем называть также производящей функцией. Формулы преобразований, задаваемых (74.10):

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j}, \quad P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j}, \quad (75.10)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_j}. \quad (76.10)$$

Учитывая (75.10), видим, что  $P_j - p_j = O(\varepsilon)$ , и поэтому с точностью до членов первого порядка по параметру  $\varepsilon$  имеем

$$P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(q, p, t)}{\partial q_j}, \quad (77.10)$$

$$Q_j - q_j = \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2(q, p, t)}{\partial p_j}. \quad (78.10)$$

Заметим, что в  $\tilde{F}_2$  можно заменить  $P_j$  на  $p_j$ . Положим  $\varepsilon = dt$ ,  $\tilde{F}_2 = \mathcal{H}(q, p)$ . Из (77.10) - (78.10) найдём



$$\delta q_j = Q_j - q_j = dt \frac{\partial H}{\partial p_j} = dt \dot{q}_j = dq_j, \quad (79.10)$$

$$\delta p_j = P_j - p_j = -dt \frac{\partial H}{\partial q_j} = dt \dot{p}_j = dp_j. \quad (80.10)$$

Мы видим, что с помощью инфинитезимального канонического преобразования с производящей функцией  $\tilde{F}_2 = \mathcal{H}$  мы получили значения канонических переменных в момент времени  $t + dt$ , т. е. мы нашли  $q(t + dt)$ ,  $p(t + dt)$ .

Иными словами, изменение механического состояния гамильтоновой системы за малый промежуток времени  $dt$  можно получить посредством инфинитезимального канонического преобразования, генерируемого гамильтонианом. Под этим углом зрения само движение механической системы можно рассматривать как непрерывно совершаемое каноническое преобразование, производящей функцией которого в каждый данный момент времени является гамильтониан системы.

## 10.8. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим “элемент объема” фазового пространства

$$d\Gamma = dq_{10} \dots dq_{s0} dp_{10} \dots dp_{s0}$$

и вычислим интеграл  $\Gamma_0 = \int d\Gamma$  по некоторой области  $(\Gamma_0)$  фазового пространства, изображающий собой ее объём. Представим себе, что в объеме  $\Gamma_0 = \int d\Gamma$  в момент времени  $t_0$  сосредоточена бесконечная совокупность одинаковых механических гамильтоновых систем (так называемый ансамбль Гиббса), отличающихся друг от друга только начальными условиями. С течением времени этот ансамбль будет передвигаться в фазовом пространстве, заняв в момент  $t_0 + \Delta t$  другую область  $\Gamma$  с объёмом

$$\Gamma = \iint_{(\Gamma)} \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s. \quad (81.10)$$

Ясно, что каждая точка фазового пространства перемещается со временем согласно гамильтоновым уравнениям. На фазовой плоскости это движение изображено на рис. 1.10.

Покажем, что при перемещении объем рассматриваемого участка фазового пространства остается неизменным, т. е.  $\Gamma_0 = \Gamma$ :

$$\iint_{(\Gamma_0)} \dots \int dq_{10} \dots dq_{s0} dp_{10} \dots dp_{s0} = \iint_{(\Gamma)} \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s. \quad (82.10)$$

Учитывая, что реальное движение системы можно рассматривать как непрерывно совер-

шаемое каноническое преобразование, производящей функцией которого является гамильтониан системы в момент времени  $t$ , установим связь между переменными  $q_{i0}, p_{i0}$  в момент времени  $t_0$  и переменными  $q_i, p_i$  момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Из (79.10) и (80.10) следует

$$\delta q_i = dq_i = \frac{\partial H(q_0, p_0, t_0)}{\partial p_{i0}} \Delta t \equiv \frac{\partial H_0}{\partial p_{i0}} \Delta t, \quad (83.10)$$

$$\delta p_i = dp_i = -\frac{\partial H(q_0, p_0, t_0)}{\partial q_{i0}} \Delta t \equiv -\frac{\partial H_0}{\partial q_{i0}} \Delta t. \quad (84.10)$$

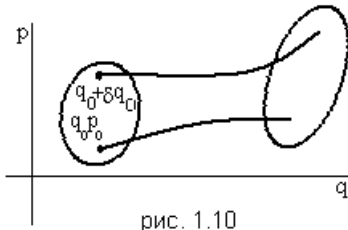


рис. 1.10

Так как  $(q), (p)$  являются функциями  $(q_0), (p_0)$ , запишем фазовый объем  $\Gamma$  в виде интеграла по области

$$\Gamma = \iint_{(\vec{r}_i)} \int D dq_{10} \dots dq_{s0} dp_{10} \dots dp_{s0}, \quad (85.10)$$

где

$$D = \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_{10}, \dots, q_{s0}, p_{10}, \dots, p_{s0})}$$

- якобиан преобразования от переменных  $(q), (p)$  к переменным  $(q_0), (p_0)$ . Элементы якобиана с учетом (83.10)-(84.10) нетрудно получить в виде

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} = \delta_{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p_{i0} \partial q_{j0}} \Delta t, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p_{i0} \partial p_{j0}} \Delta t, \quad (86.10)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial q_{i0} \partial q_{j0}} \Delta t, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial q_{i0} \partial p_{j0}} \Delta t. \quad (87.10)$$

Подставляя (86.10) - (87.10) в выражение для якобиана  $D(t_0 + \Delta t)$ , найдем с точностью до линейных по  $\Delta t$  членов:

$$D(t_0 + \Delta t) = 1 + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_{i0} \partial q_{i0}} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_{i0} \partial p_{i0}} \right) \Delta t = 1. \quad (88.10)$$

Это теорема Лиувилля, выражающая собой закон сохранения фазового объема: *Фазовый объем данного ансамбля механических гамильтоновых систем (в отсутствие диссипативных сил) не изменяется во время движения.*

Хотя мы доказали теорему о сохранении фазового объема, используя бесконечно

малые канонические преобразования, нетрудно доказать ее и для конечных канонических преобразований, замечая, что канонические преобразования обладают групповыми свойствами.

### 10.9. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Рассмотрим некоторую функцию обобщённых координат и обобщённых импульсов  $u(q, p)$ . Предположим, что в результате бесконечно малого канонического преобразования эта функция изменилась на  $\delta u$ . Под изменением функции понимаем замены ее аргументов  $q \rightarrow Q$ ,  $p \rightarrow P$ , т. е. переход от  $q(t)$ ,  $p(t)$  к их значениям в момент времени  $t + \Delta t$ . Вычислим  $\delta u$ :

$$\begin{aligned} \delta u &= u(q_j + \delta q_j, p_j + \delta p_j) - u(q_j, p_j) = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial u}{\partial p_j} \delta p_j \right) = \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j} \right) = \varepsilon [u, \tilde{F}_2]. \end{aligned} \quad (89.10)$$

Здесь мы использовали формулы инфинитезимальных канонических преобразований. Положим теперь, что  $u$  есть гамильтониан системы. Тогда

$$\delta \mathcal{H} = \varepsilon [\mathcal{H}, \tilde{F}_2], \quad (90.10)$$

и если  $\tilde{F}_2$  - интеграл движения, то  $[\mathcal{H}, \tilde{F}_2] = 0$ . Из (90.10) видно, что инфинитезимальные канонические преобразования осуществляются такой производящей функцией  $\tilde{F}_2$ , что гамильтониан системы не изменяется, так как  $\delta \mathcal{H} = 0$ . Это наблюдение позволило высказать утверждение, что все первые интегралы уравнений движения являются производящими функциями тех инфинитезимальных канонических преобразований, при которых не меняется гамильтониан.

Пример. Рассмотрим систему, гамильтониан которой не содержит обобщённую координату  $q_i$ , т. е.  $q_i$  - циклическая координата. Запишем уравнения инфинитезимальных преобразований

$$\delta q_j = \varepsilon \delta_{ij} \equiv \sum_{i=1}^s |dq_i| \delta_{ij}, \quad \delta p_i = 0. \quad (91.10)$$

Мы учли, что  $p_i = \text{const}$  и  $\delta p_i = 0$ .

С другой стороны,

$$\delta q_j = \varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial p_j}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_i}. \quad (92.10)$$

Сравнивая (91.10) и (92.10), получаем  $\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_i} = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ , откуда  $\tilde{F}_2 = p_i$ , т. е. производящая функция представляет собой канонический импульс, сопряженный координате  $q_i$ .

**Глава 11**  
**МЕТОД ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ**

**11.1. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Канонические преобразования обладают групповыми свойствами, т. е. переход от переменных  $(q), (p)$  к переменным  $(Q'), (P')$  можно осуществить следующими способами. Пусть, например, преобразования генерируются производящей функцией  $F_1(q, Q)$ . Рассмотрим двухэтапный переход от  $(q), (p)$  к  $(Q'), (P')$ , который осуществляется функциями  $\tilde{F}_1(q, Q)$  и  $\tilde{F}_1(Q, Q')$ . Тогда на первом этапе

$$\delta F_1(q, Q) = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \delta Q_j \right), \quad (1.11)$$

а на втором

$$\delta \tilde{F}_1(Q, Q') = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q_j} \delta Q_j + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q'_j} \delta Q'_j \right). \quad (2.11)$$

Из (1.11) и (2.11) следует, что переход  $(q), (p) \rightarrow (Q'), (P')$  можно осуществить сразу с помощью производящей функции  $F'_1 = F_1(q, Q) + \tilde{F}_1(Q, Q')$ , так как  $-\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q_j} = P_j$  и

$$\delta F'_1 = \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial Q'_j} \delta Q'_j \right). \quad (3.11)$$

Таким образом, канонические преобразования обладают групповыми свойствами. Это наводит на мысль попытаться найти такое каноническое преобразование, с помощью которого можно было бы совершить переход от  $p_j(t)$  к  $P_j(t) = p_j(t_0)$  и от  $q_j(t)$  к  $Q_j = q_j(t_0)$ . Если бы удалось найти способ построения производящей функции такого преобразования, то по формулам, связывающим старые и новые переменные, мы нашли бы канонические переменные как функции

$$\begin{aligned} q_j &= q_j((q_0), (p_0), t), \quad p_j = p_j((q_0), (p_0), t), \\ (q_0) &= q_j(t_0), \quad (p_0) = p_j(t_0), \quad j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

что, очевидно, эквивалентно интегрированию уравнений Гамильтона, т. е. полному решению основной задачи механики гамильтоновым методом. Вопрос можно сформулировать так: *Найти каноническое преобразование, проведение которого сведёт задачу интегрирования канонических уравнений к тривиальной.*

## 11.2. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА - ЯКОБИ

Самый простой способ решения сформулированной задачи состоит в том, чтобы “новый” (преобразованный) гамильтониан  $\mathbf{H}'$  сделать равным нулю. Тогда канонические уравнения в новых переменных становятся тривиальными:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial P_j} = 0, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial Q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (4.11)$$

и, действительно,  $Q_j$  и  $P_j$  будут постоянными. Но при этом  $\mathbf{H}'$  должен быть связан с  $\mathbf{H}$  формулой

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (5.11)$$

где  $F_1$  - производящая функция канонического преобразования.

Следовательно, (5.11) есть уравнение для производящей функции преобразования. Выбирают  $F_1 \equiv F_2(q, P, t)$ . Но так как гамильтониан  $\mathbf{H}$  зависит от “старых” переменных  $(q), (p)$ , а  $F_2$  - от “старых” и “новых” переменных,  $\mathbf{H}$  нужно выразить через те же, что и входящие в функцию  $F_2$  переменные, используя уравнения преобразования

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}. \quad (6.11)$$

Подставив (6.11) в  $\mathbf{H}$ , получим дифференциальное уравнение в частных производных, которым определяется  $F_2$  как функция координат и времени:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \mathbf{H}\left(q_j, \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, t\right) = 0. \quad (7.11)$$

Одно из решений этого уравнения обозначают буквой  $S$ . Гамильтон назвал это решение главной функцией. Уравнение, определяющее эту функцию,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{H}\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right) = 0 \quad (8.11)$$

называется уравнением Гамильтона - Якоби.

Обсудим вопрос о функции  $S$  более подробно. Прежде всего, так как  $S$  является решением (8.11), ясно, что функция  $S$  зависит от  $q_j, t$ , в то время как нам нужно знать и характер зависимости  $S$  от “новых” импульсов  $P_j$ . С другой стороны, о них мы знаем, что они

должны быть постоянными. И тому и другому можно удовлетворить, если в качестве  $S$  выбрать так называемый полный интеграл уравнения (8.11).

Определение. *Полным интегралом уравнения первого порядка*

$$L \left( t, x_1, \dots, x_s, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) = 0$$

называют функцию  $f(t, x_1, \dots, x_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{s+1})$ , удовлетворяющую этому уравнению и содержащую столько независимых постоянных  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ , сколько в этом уравнении независимых переменных  $t, x_1, \dots, x_s$ .

В нашем случае независимыми переменными являются  $t$  и  $s$  обобщённых координат  $q_j$ , поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона - Якоби будет содержать  $s + 1$  постоянную. Одна из этих постоянных, скажем,  $\alpha_{s+1}$ , аддитивная, так как в силу того, что уравнение (8.11) содержит только производные от функции  $S$ , но не саму функцию, если  $S$  есть решение уравнения (8.11), то и  $S + \alpha_{s+1}$  - решение этого уравнения<sup>1</sup>.

Вспомним теперь, что полный интеграл  $S$  нам нужен в качестве производящей функции канонического преобразования, а в формулы преобразования входит не сама функция  $S$ , а ее производные  $\frac{\partial S}{\partial q_j}$  и  $\frac{\partial S}{\partial p_j}$ . Поэтому аддитивная постоянная  $\alpha_{s+1}$  несущественна, а полный интеграл уравнения (8.11) можно записать в виде

$$S(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \tag{9.11}$$

причём теперь ни одна из постоянных  $\alpha_j$  не является аддитивной. Если  $\alpha_j$  принять за “новые” переменные  $P_j$ , то  $S$  в точности будет соответствовать  $F_2$  по их зависимости от одних и тех же аргументов. Поэтому можно положить  $P_j = \alpha_j$ .

Заметим, что  $\alpha_j$  можно выразить через значения координат  $(q_0)$  и импульсов  $(p_0)$  в начальный момент времени  $t_0$ , как и должно быть по самому смыслу преобразований. Итак, если мы нашли полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби  $S$ , то, используя его как производящую функцию канонического преобразования, получим первую группу уравнений преобразования:

---

<sup>1</sup> Известно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции; такое решение называют общим интегралом уравнения.

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial S((q), (\alpha), t)}{\partial q_j}. \quad (10.11)$$

Полагая в этих формулах  $t = t_0$ , найдем  $\alpha_j$  как функции  $(q_0), (p_0)$ . Следовательно,  $\alpha_j$  определяются заданными начальными условиями.

Вторая группа уравнений преобразования есть по существу преобразование к новым (постоянным) координатам

$$Q_j = \beta_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \equiv \frac{\partial S((q), (\alpha), t)}{\partial \alpha_j}. \quad (11.11)$$

“Новые” координаты  $Q_j$  мы обозначаем буквой  $\beta_j$ . Постоянные  $\beta_j$  можно выразить через начальные значения  $(q_0), (p_0)$ , полагая в (11.11)  $t = t_0$ . Если же (11.11) разрешить относительно  $q_j$ , то мы получим

$$q_j = q_j((\alpha), (\beta), t) = q_j((q_0), (p_0), t). \quad (12.11)$$

Сформулируем общий алгоритм нахождения решений канонических уравнений методом Гамильтона - Якоби.

1. Получить полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (8.11), т. е. найти решение этого уравнения, содержащее  $s$  существенных постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ .

2. Приравнять частные производные  $S$  по этим постоянным интегрирования  $s$  новым постоянным:  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j$ .

3. Разрешая эти уравнения относительно координаты  $q_j$ , записать их в форме

$$q_j = q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s).$$

Эти процедуры приводят к полному решению задачи интегрирования канонических уравнений, так как в итоге мы получаем  $q_j, p_j$  в виде явных функций  $t$  и  $2s$  постоянных интегрирования, которые могут быть выбраны в соответствии с начальными условиями.

4. Зависимость “старых” импульсов от времени можно найти из соотношений  $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ .

Итак, с помощью полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби  $S$  осуществляется переход к постоянным координатам  $\beta_j$  и импульсам  $\alpha_j$ . Решение уравнения Гамильтона-Якоби эквивалентно решению рассматриваемой нами задачи интегрирования системы ка-



ноических уравнений. С точки зрения математики это известное соответствие между уравнением первого порядка в частных производных и системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно известно, что каждому уравнению в частных производных соответствует определенная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

### 11.3. ТЕОРЕМА ЯКОБИ

Функции  $q_j = q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s)$ ,  $p_j = p_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s)$ , полученные из соотношений

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

являются решениями канонических уравнений;  $S$  - полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Докажем эту теорему. Продифференцируем по времени  $\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$ .

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \dot{q}_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (13.11)$$

Подставим решение  $S(t, q_1(t), \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  в уравнение Гамильтона-Якоби и продифференцируем его по  $\alpha_j$ :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (14.11)$$

Мы учли, что производные  $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ , содержащие постоянные  $\alpha_j$ , стоят в гамильтониане  $\mathbf{H}$  на местах импульсов  $p_k$ .

Уравнения (13.11) образуют систему  $s$  алгебраических неоднородных уравнений, из которых можно найти  $\dot{q}_k$ . Определитель этой системы равен функциональному определителю

$$\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \right|,$$

который не равен нулю в силу независимости  $\alpha_j$  в полном интеграле

$S(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . Аналогичную систему с теми же коэффициентами образуют уравнения (14.11) относительно  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_k}$ . Значит,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

т. е. мы приходим к первой группе канонических уравнений.

Чтобы получить вторую группу канонических уравнений, продифференцируем соотношение  $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) по  $t$ :

$$\dot{p}_j = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k. \quad (15.11)$$

Далее продифференцируем  $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{H}\left(q, \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right), t\right) = 0$  по  $q_j$ :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} = 0. \quad (16.11)$$

Сравнивая (15.11) и (16.11), получаем

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Мы получили вторую группу канонических уравнений. Теорема Якоби доказана. Справедлива также обратная теорема:

*Из решений системы канонических уравнений*

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

*можно составить полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби  $S(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ .*

#### 11.4. КОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим консервативную систему, когда  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$ . В этом случае уравнение Гамильтона-Якоби явно времени не содержит, а зависимость  $S$  от времени, очевидно, сводится к слагаемому  $-\mathbf{H}_0 t$ :

$$S = S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - \mathbf{H}_0 t. \quad (17.11)$$

Функцию  $S$  называют также действием, функцию  $S_0$ , зависящую только от координат, называют укороченным действием.

Подставляя (17.11) в (8.11), получим уравнение Гамильтона-Якоби для укороченного действия в виде

$$\mathbf{H}\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = \mathbf{H}_0. \quad (18.11)$$

### 11.5. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Предположим, что координата  $q_k$  и соответствующая производная  $\frac{\partial S}{\partial q_k}$  входят в уравнение Гамильтона-Якоби только в виде какой-то комбинации  $g\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)$ , которая не содержит никаких других координат, производных  $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ ,  $j \neq k$ , и времени, т. е. допустим, что уравнение в частных производных имеет следующую структуру:

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial t}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}, \dots, g\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)\right) = 0. \quad (19.11)$$

Ищем решение (19.11) в виде суммы

$$S = \tilde{S}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, t) + S_k(q_k). \quad (20.11)$$

Подставив это выражение в (19.11), получим

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, g\left(q_k, \frac{\partial S_k}{\partial q_k}\right)\right) = 0. \quad (21.11)$$

Но поскольку (20.11) есть решение (19.11), то очевидно уравнение (21.11) распадается на два уравнения:

$$g\left(q_k, \frac{\partial S_k}{\partial q_k}\right) = \alpha_k, \quad (22.11)$$

$$L\left(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, t, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{k+1}}, \dots, \alpha_k\right) = 0, \quad (23.11)$$

где  $\alpha_k$  - произвольная постоянная.

Уравнение (22.11) является обыкновенным дифференциальным уравнением, из которого функцию  $S_k(q_k)$  можно найти простым интегрированием. После такого разделения мы получим уравнение в частных производных (23.11) с меньшим (на одну) числом независимых переменных.

В ряде случаев разделение переменных можно произвести полностью. Если это возможно и механическая система консервативна, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби целиком сводится к квадратурам. Для консервативной системы с  $s$  степенями свободы искомый полный интеграл представляется в виде

$$S = \sum_{j=1}^s S_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_s) - \mathbf{H}_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t, \quad (24.11)$$

где каждая из функций  $S_j$  зависит лишь от одной координаты  $q_j$ , а  $\mathbf{H}_0$  как функция произвольных постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  получается в результате подстановки  $S_0 = \sum_{j=1}^s S_j$  в уравнение (18.11). Заметим, что  $\mathbf{H}_0$  можно выбрать также в качестве одной из постоянных  $\alpha$ . Метод разделения переменных включает в себя как частный случай циклической координаты.

Пусть, например,  $q_1$  - циклическая координата. Тогда, очевидно, уравнение (22.11) приобретает вид

$$\frac{dS_1}{dq_1} = \alpha_1 \quad (25.11)$$

и его решение находится тривиальным интегрированием  $S_1 = \alpha_1 q_1$ . Легко видеть, что постоянная  $\alpha_1$  имеет смысл сохраняющегося обобщённого импульса, сопряжённого координате  $q_1$ . Отметим, что отделение времени фактически соответствует методу разделения переменных, когда роль циклической переменной играет  $t$ .

*Пример. Частица массы  $m$  в однородном и постоянном гравитационном поле напряжённости  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ .*

Гамильтониан системы запишем в декартовой системе координат

$$\mathbf{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz.$$

Уравнение Гамильтона - Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + mgz = 0. \quad (26.11)$$

Решение (26.11) ищем в виде

$$S = \alpha_1 x + \alpha_2 y + S_3(z) - \alpha_3 t. \quad (27.11)$$

Здесь мы положили  $\mathbf{H}_0 = \alpha_3$ . Подставляя (27.11) в (26.11), получим

$$\left( \frac{dS_3}{dz} \right)^2 = 2m \left( \alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right), \quad (28.11)$$

откуда

$$S_3(z) = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}} dz \quad (29.11)$$

и

$$S = -\alpha_3 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}} dz. \quad (30.11)$$

Выражение (30.11) представляет собой полный интеграл уравнения (26.11). Производные S по  $\alpha_i$  приравняем новым постоянным:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2m}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}, \quad (31.11)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = y - \frac{\alpha_2}{\sqrt{2m}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}, \quad (32.11)$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}}. \quad (33.11)$$

Вычислим неопределенный интеграл

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha_3 - mgz - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}}} = -\frac{2}{mg} \sqrt{\left( \alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right) - mgz}$$

и результат подставим в (31.11), (32.11), (33.11):

$$\beta_1 = x + \frac{2^{1/2} \alpha_1}{m^{3/2} g} \sqrt{\left( \alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right) - mgz}, \quad (34.11)$$

$$\beta_2 = y + \frac{2^{1/2} \alpha_2}{m^{3/2} g} \sqrt{\left( \alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right) - mgz}, \quad (35.11)$$

$$\beta_3 = -t - \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \sqrt{\left( \alpha_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} \right) - mgz}. \quad (36.11)$$

Из (34.11), (35.11) следует, что траекторией частицы является парабола; уравнением (36.11) определяется закон движения  $z(t)$ . Сохраняющиеся компоненты импульса  $p_x, p_y$  найдем из соотношений

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_1, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_2.$$

Компоненту импульса  $p_z$  можно найти как функцию  $z$  из соотношения

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \sqrt{2m(\alpha_3 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

## 11.6. ПЕРЕМЕННЫЕ “ДЕЙСТВИЕ - УГОЛ”

Рассмотрим консервативную механическую систему и предположим, что существует хотя бы один набор канонических переменных, в котором все переменные разделяются. Это нужно понимать так: можно отыскать канонические переменные, в которых решение уравнения Гамильтона-Якоби примет вид (24.11). Далее предположим, что исследуемые нами механические системы могут совершать движения, близкие к периодическим: мы рассматриваем такие движения, в которых либо каждая из переменных  $q_j(t), p_j(t)$  является периодической функцией времени с одинаковым периодом, либо каждый импульс  $p_j$  является периодической функцией координаты  $q_j$ , в то время как сама координата не является периодической функцией времени. В первом случае движение называют либрацией, во втором - вращением. Нелишне также подчеркнуть, что здесь  $q_j, p_j$  и есть тот самый набор канонических переменных, в котором переменные в уравнении Гамильтона-Якоби полностью разделяются.

Заметим, что механические системы, в которых реализуются вышеупомянутые движе-

ния, не столь редки. Есть системы, в которых возможны оба движения – либрация и вращение – в зависимости от того, какая область значений параметров и начальных значений реализуется. Проекция фазовой траектории такой системы на соответствующую плоскость качественно изображена на рис. 2.11.

Уравнение Гамильтона-Якоби для рассматриваемых нами систем имеет вид

$$\mathbf{H}\left(g_1\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}\right), \dots, g_s\left(q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)\right) = H_0, \quad (37.11)$$

причем

$$g_j\left(q_j, \frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (38.11)$$

$$S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{j=1}^s S_{0j}(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (39.11)$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (40.11)$$

Канонические импульсы  $p_j$ , определяемые соотношениями

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}, \quad (41.11)$$

зависят только от  $q_j$  и являются периодическими функциями этой же координаты. Весьма плодотворной является идея перехода к таким “новым” каноническим переменным, в которых “новые” импульсы были бы постоянными движения  $J_j$ , зависящими от постоянных  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ :

$$P_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (42.11)$$

а все “новые” координаты были бы циклическими, т. е. “новый” гамильтониан зависел бы только от импульсов

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(J_1, \dots, J_s). \quad (43.11)$$

Из (41.11) видно, что в качестве  $J_j$  можно выбрать

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (44.11)$$

где интегралы берутся по полным периодам изменения импульсов  $p_j$  как функций соответствующих координат.

“Новые” переменные  $J_j$  являются независимыми функциями  $(\alpha)$ , что следует из (42.11):

$$J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (45.11)$$

Их называют переменными действия. Разрешая последние соотношения относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , получим

$$\alpha_j = \alpha_j(J_1, \dots, J_s), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (46.11)$$

Подставляя (46.11) в (40.11), найдем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(J_1, \dots, J_s). \quad (47.11)$$

Укороченное действие  $S_0((q), (\alpha))$  после подстановки в него  $\alpha_j$  из (46.11) приобретает вид

$$S_0(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s).$$

Но по установленному выше смыслу  $S_0$  как функцию  $(q), (J)$  можно рассматривать как производящую функцию канонического преобразования к переменным, в которых  $(J)$  играют роль импульсов. “Новые” координаты при таком преобразовании можно получить из соотношений

$$Q_j \equiv \varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}. \quad (48.11)$$

“Новые” координаты мы обозначили буквой  $\varphi_j$ ; они называются угловыми переменными.

Канонические переменные  $J, \varphi$  называются переменными “действие-угол”. Уравнения Гамильтона в этих переменных очень просты:

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_j}, \quad (49.11)$$

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial \varphi_j} = 0. \quad (50.11)$$

Из (49.11) с учетом (47.11) получим

$$\varphi_j = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_j} t + \varphi_{j0}. \quad (51.11)$$

Каждая из угловых переменных, как видно, является линейной функцией времени.

Покажем теперь, что величина  $\omega_j = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_j}$  есть частота изменения импульса  $p_j$ . Для



этого найдем приращение  $\Delta\varphi_j$  за полный период изменения  $p_j(q_j)$  при условии постоянства всех других (кроме  $q_j$ ) координат:

$$\Delta\varphi_j = \oint \frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k} dq_k = \oint \frac{\partial^2 S_0}{\partial J_j \partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint p_k dq_k = 2\pi \frac{\partial J_k}{\partial J_j} = 2\pi \delta_{kj}, \quad (52.11)$$

где  $\delta_{kj}$  - символ Кронекера со значениями  $\delta_{kj} = 1, k = j, \delta_{kj} = 0, k \neq j$ . С другой стороны,

$$\Delta\varphi_j = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_j} T_j, \quad (53.11)$$

где  $T_j$  - полный период изменения импульса  $p_j$ . Сравнивая (52.11) с (53.11), видим, что

$$2\pi = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_j} T_j = \omega_j T_j, \quad (54.11)$$

откуда следует, что

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T_j} \quad (55.11)$$

есть частота изменения импульса.

Фактически мы показали, что для нахождения частот  $\omega_j$  нет необходимости решать динамическую задачу, т. е. отыскивать  $q_j(t)$ . Для определения  $\omega_j$  нужно:

- 1) определить функции  $p_j = p_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ;
- 2) найти переменные действия как функции  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s : J_j = J_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ;
- 3) определить гамильтониан  $\mathbf{H}_0$  как функцию  $J_1, J_2, \dots, J_s : \mathbf{H}_0(J_1, \dots, J_s)$ ;
- 4) найти частные производные  $\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_j} = \omega_j$ .

Подчеркнем, что это утверждение относится лишь к системам, которые могут совершать движения, близкие к периодическим в указанном в начале п. 11.6 смысле слова. Движение произвольной механической системы со многими степенями свободы в общем случае не является периодическим ни в целом, ни по каждой из ее координат в отдельности, несмотря на то, что задача о движении этой системы допускает полное разделение переменных в методе Гамильтона-Якоби. Можно показать, однако, что любая однозначная функция механического состояния системы  $f(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ , выраженная через переменные “действие - угол”, является периодической функцией  $\varphi_j$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому ее можно представить в виде разложения в кратный ряд Фурье вида

$$f(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_s=-\infty}^{\infty} c_{j_1, j_2, \dots, j_s} e^{it(j_1\omega_1 + \dots + j_s\omega_s)}.$$

Каждый из членов этого ряда является периодической функцией времени с частотой

$$j_1\omega_1 + \dots + j_s\omega_s.$$

Весь ряд, однако, не будет представлять собой в целом строго периодическую функцию, если все частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$  не кратны какой-либо одной из них. Полагая  $f = q_j$  или  $f = p_j$ , видим, что последнее замечание относится и к  $q_j$  и  $p_j$ .

**Пример.** Определить частоты трехмерного анизотропного осциллятора.

Гамильтониан системы

$$\mathbf{H} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для укороченного действия

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)}{2} = \mathbf{H}_0 \quad (56.11)$$

сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$g_1 \left( x \frac{\partial S_0}{\partial x} \right) = \left( \frac{dS_{01}}{dx} \right)^2 + m^2 \omega_1^2 x^2 = p_x^2 + (m\omega_1 x)^2 = \alpha_1, \quad (57.11)$$

$$g_2 \left( y \frac{\partial S_0}{\partial y} \right) = \left( \frac{dS_{02}}{dy} \right)^2 + (m\omega_2 y)^2 = p_y^2 + (m\omega_2 y)^2 = \alpha_2, \quad (58.11)$$

$$g_3 \left( z \frac{\partial S_0}{\partial z} \right) = \left( \frac{dS_{03}}{dz} \right)^2 + (m\omega_3 z)^2 = p_z^2 + (m\omega_3 z)^2 = \alpha_3. \quad (59.11)$$

При этом

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2m},$$

а переменные действия - “новые импульсы” -

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_y dy, \quad J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint p_z dz. \quad (60.11)$$

Видно, что в соответствующих плоскостях фазовые траектории представляют собой эллипсы с полуосями  $\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_1}/m\omega_1$  в плоскости  $p_x x$ ,  $\sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_2}/m\omega_2$  в плоскости  $p_y y$ ,  $\sqrt{\alpha_3}, \sqrt{\alpha_3}/m\omega_3$  в плоскости  $p_z z$  соответственно. Величины  $J_1, J_2, J_3$  представляют собой площади этих эллипсов, деленные на  $2\pi$ . Поэтому

$$J_1 = \alpha_1/2m\omega_1, J_2 = \alpha_2/2m\omega_2, J_3 = \alpha_3/2m\omega_3$$

и

$$\mathbf{H}_0(J_1, J_2, J_3) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \omega_3 J_3.$$

Следовательно, частоты изменения импульсов  $p_x, p_y, p_z$  равны

$$\omega_x = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_1} = \omega_1, \omega_y = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_2} = \omega_2, \omega_z = \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial J_3} = \omega_3.$$

### 11.7. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Важным свойством переменных действия является свойство адиабатической инвариантности, которое заключается в том, что переменные действия сохраняют свои постоянные значения и в тех случаях, когда гамильтониан системы зависит от времени через некоторые параметры  $\lambda_j(t)$ , которые, как говорят, адиабатически меняются со временем, т. е. очень медленно. Под медленными подразумеваются такие изменения, при которых  $\lambda_j(t)$  мало меняются за отрезки времени, равные по порядку величины периодам  $T_j$ , т. е.

$$\left| \frac{d\lambda_j}{dt} \right| T_j \ll \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (61.11)$$

Ясно, что такие механические системы не являются строго изолированными. Покажем, что переменные действия в таких системах являются адиабатическими инвариантами.

Рассмотрим систему, совпадающую в каждый момент времени с изученной выше консервативной системой, которая допускает полное разделение переменных. Предполагаем также, что движение системы финитно. Гамильтониан такой системы явно зависит от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , которые удовлетворяют условиям (61.11); его можно представить в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}\{g_1(q_1, p_1, \lambda_1), \dots, g_s(q_s, p_s, \lambda_s)\}. \quad (62.11)$$

При постоянном  $\lambda_j$   $p_j$  являются периодическими функциями соответствующих координат  $q_j$ ;  $q_j$  в данном случае являются периодическими функциями времени.

Если параметры  $\lambda_j$  меняются со временем медленно, то, несмотря на то что система, описываемая гамильтонианом (62.11) не консервативна, решение уравнения Гамильтона-Якоби можно искать в виде, близком к (24.11):

$$S = -\mathbf{H}_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t + S_0(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (63.11)$$

где, однако, параметры  $\lambda_j$ , а поэтому и величины  $\alpha_k$  и  $\mathbf{H}_0$  медленно меняются со временем. Подставляя (63.11) в уравнение Гамильтона-Якоби и пренебрегая в нем членами, пропорциональными  $\dot{\lambda}_j$ , получим уравнение “нулевого приближения”

$$\mathbf{H} \left\{ \mathbf{g}_1 \left( q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \lambda_1 \right), \dots, \mathbf{g}_s \left( q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, \lambda_s \right) \right\} = \mathbf{H}_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (64.11)$$

В силу (61.11) это уравнение можно решать, полагая все  $\lambda_j$  постоянными, и лишь в построенных решениях считать их заданными функциями времени. Поэтому все формулы, полученные выше для консервативной системы остаются справедливыми, но во все соотношения теперь войдут зависящие от времени параметры  $\lambda_j$ .

Производящая функция канонического преобразования от переменных  $(q), (p)$  к переменным  $(\varphi), (J)$  определяется функцией  $S_0$ , которая теперь, однако, будет зависеть и от  $\lambda_j$ :

$$S_0 = S_0(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (65.11)$$

Заметим, что  $J_j$  также зависят от  $\lambda$ .

Напишем формулы канонического преобразования, генерируемого функцией (65.11):

$$p_j = \frac{\partial S_0}{\partial q_j}, \quad (66.11)$$

$$\varphi_j = \frac{\partial S_0}{\partial J_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (67.11)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \mathbf{H}(J_1, \dots, J_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \quad (68.11)$$

Новые уравнения движения имеют вид

$$\dot{\varphi}_k = \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial J_k} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial J_k} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial J_k \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad (69.11)$$

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \varphi_k} = -\sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 S_0(q(\varphi, J, \lambda), J, \lambda)}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad (70.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, s.$$

Во всех формулах дифференцирование по  $\lambda_j$  должно производиться при постоянных  $(q)$  и  $(J)$ ; после дифференцирования в формулах (69.11), (70.11) выполняется подстановка (67.11) и производные  $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$  выражаются через  $J_1, \dots, J_s, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ .

Для доказательства свойства адиабатической инвариантности переменных  $J_k$  усредним уравнения (70.11) по интервалу времени, малому по сравнению со временем заметного изменения параметров  $\lambda_j$  и достаточно большому по сравнению с периодами системы. При таком выборе интервала времени величины  $\lambda_j$  (в силу медленного изменения  $\lambda_j$ ) можно выносить из-под знака среднего. Следовательно,

$$\bar{\dot{J}}_k = -\sum_{j=1}^s \overline{\frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j}} \dot{\lambda}_j, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (71.11)$$

Покажем теперь, что производные  $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$  являются однозначными периодическими функциями  $\varphi$ . Если это так, то тогда их можно будет разложить в ряды Фурье, коэффициенты которых будут зависеть от  $(J)$  и  $(\lambda)$ . В свою очередь ряды Фурье для производных  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)$  не будут содержать постоянных членов, и поэтому при усреднении по достаточно большому интервалу времени все производные  $\frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi_k \partial \lambda_j}$  обратятся в нуль и адиабатическая инвариантность всех  $J_k$  будет доказана.

Заметим, что  $S_0$  - неоднозначная функция координат  $q_j$ , так как согласно (66.11) ее можно представить в виде

$$S_0 = \sum_{j=1}^s \int p_j dq_j. \quad (72.11)$$

За полный период изменения координаты  $q_j$  (при остальных фиксированных)  $S_0$  получает приращение

$$\Delta S_0 = \oint p_j dq_j = 2\pi J_j . \quad (73.11)$$

Функции  $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$  - однозначные функции координат, так как при дифференцировании по  $\lambda_j$

добавки, кратные  $2\pi J_j$ , которые приводят к неоднозначности  $S_0$ , исчезнут. Так как  $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$  -

однозначные функции координат  $q_j$ , то они являются периодическими функциями угловых переменных  $\varphi_j$ ; эти функции не будут менять свои значения при изменении  $\varphi_j$  на  $2\pi$  (при заданных значениях  $J_j$ ).

Иными словами, любая однозначная функция  $F((q), (p))$ , выраженная через канонические переменные  $\varphi, J$ , является периодической функцией каждой  $\varphi_j$  с

периодом, равным  $2\pi$ . Итак все  $\frac{\partial S_0}{\partial \lambda_j}$  являются однозначными периодическими функциями

( $\varphi$ ). Выше мы показали, что в этом случае все  $\bar{J}_k = 0$  и, значит, все

$$J_k = J_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Свойство адиабатической инвариантности всех переменных действия доказано.

*Пример. Как изменится энергия заряженной частицы  $e$  массы  $m$  в центральном поле  $U(r)$  при медленном включении слабого однородного магнитного поля напряженности  $H$ ?*

Запишем функцию Гамильтона заряда в сферической системе координат (ось  $Oz$  декартовой системы координат параллельна  $H$ ):

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r) - eH p_\varphi / 2mc - e^2 H^2 r^2 \sin^2 \theta / 8mc^2 .$$

Здесь  $c$  - скорость света. По условию задачи магнитное поле слабое, поэтому последним членом (квадратичным по  $H$ ) пренебрегаем.

Уравнение Гамильтона-Якоби с учетом этого приобретает вид

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 + U(r) - \Omega/2 \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right) = E_0 , \quad (74.11)$$

где  $E_0$  - энергия частицы,  $\Omega = eH/mc$  - циклотронная частота.

Решение ищем в виде

$$S_0 = S_{0r}(r, \alpha_1, p_{\varphi 0}) + S_{0\theta}(\theta, \alpha_1, p_{\varphi 0}) + p_{\varphi 0} \varphi .$$

Здесь в качестве постоянной  $\alpha_3$  мы выбрали  $p_{\varphi 0}$ . Подставляя  $S_0$  в (74.11), получаем

$$\frac{r^2}{2m} \left( \frac{\partial S_{0r}}{\partial r} \right)^2 - (E_0 - U(r) - \Omega P_{\varphi 0} / 2) r^2 = -\alpha_1, \quad (75.11)$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_{0\theta}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{P_{\varphi 0}^2}{2m \sin^2 \theta} = \alpha_1. \quad (76.11)$$

Уравнение (75.11) определяет функцию  $p_r(\alpha_1, E_0, p_{\varphi 0}, r)$ , которая нужна для вычисления переменной действия  $J_r$ :

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint dr \sqrt{2m(E_0 - U(r) - p_{\varphi 0} \Omega(H)/2 - \alpha_1/r^2)}$$

Очевидно,  $J_r$  будет совпадать с  $\tilde{J}_r$ , вычисленным для случая  $H = 0$ , если в последнем выражении вместо  $E_0$  подставить комбинацию  $E_0 - \Omega p_{\varphi 0} / 2$ . Значит, величина  $E_0 + \Omega p_{\varphi 0} / 2$  остается постоянной при медленном включении однородного магнитного поля. Кроме нее постоянной будет величина  $p_{\varphi 0}$  - компонента обобщенного импульса заряда. По физическому смыслу  $p_{\varphi 0}$  - сохраняющаяся проекция момента импульса заряда на вектор  $H$ .

## 11.8. ТЕОРЕМА НЕТЕР

Теорема Нетер играет фундаментальную роль в современной теоретической физике. Она доказывает существование общей связи между преобразованиями, которые оставляют действие системы инвариантным, и законами сохранения. Теорема Нетер в явном виде устанавливает эту связь и позволяет построить соответствующие динамические инварианты.

*Теорема Нетер. Всякому непрерывному обратимому преобразованию координат и времени (зависящему от постоянных параметров), оставляющему неизменной (т. е. инвариантной) функцию действия рассматриваемой гамильтоновой системы, соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа этой системы. Первый интеграл уравнений Лагранжа называется динамическим инвариантом.*

Теорему Нетер можно закончить другим (вполне эквивалентным) утверждением: “...соответствует некоторая теорема сохранения и константа движения”.

Любое непрерывное преобразование имеет инфинитезимальное (т. е. бесконечно малое) преобразование. Совершим бесконечно малое преобразование координат и времени (временную переменную  $t$  здесь мы рассматриваем как координату):

$$q'_j = q_j + \varepsilon Q_j((q), t), \quad (77.11)$$

$$t' = t + \varepsilon T((q), t). \quad (78.11)$$

Очевидно, если параметр  $\varepsilon = 0$ , то преобразование (77.11), (78.11) переходит в тождественное.

Рассмотрим реальное движение системы в нештрихованных переменных:  $q_j = F_j(t)$ . В штрихованных переменных в силу инвариантности действия

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathbf{L}(q', \dot{q}', t') dt'$$

реальное движение системы происходит по закону

$$q'_j = F_j(t').$$

Выразим закон движения системы в переменных  $q_j, t$ , ограничиваясь членами порядка  $\varepsilon$ :

$$q_j(t) = F_j(t') - \varepsilon Q_j(F_j(t), t),$$

или

$$q_j(t - \delta t) = F_j(t) - \delta q_j,$$

где  $\delta q_j = \varepsilon Q_j(F_j(t), t)$ ,  $\delta t = \varepsilon T(F_j(t), t)$ .

При таком преобразовании (имеется в виду преобразование (77.11), (78.11)) траектория системы в конфигурационном пространстве (линия  $AB$ ) меняется (рис. 3.11). В результате изменения координат и времени начала и конца движения переход от траектории  $AB$  в траектории  $A'B'$  приводит к изменению действия. Нетрудно найти это изменение  $\Delta S$  в явном виде:

$$S_{A'B'} - S_{AB} = \left[ \frac{\partial S}{\partial t}(-\delta t) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j}(-\delta q_j) \right]_A^B. \quad (79.11)$$

Введем понятие функции действия

$$S(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{L}(q, \dot{q}, t) dt, \quad (80.11)$$

предполагая, что в (80.11) вместо  $(q), (\dot{q})$  подставляются решения канонических уравнений, т.е. функции  $q_j(q_0, p_0, t_0, t)$  и их производные. Определенная таким образом функция действия является функцией времени и начальных условий. Аргументами функции действия могут быть также координаты  $q_j$ , время  $t$ , а также начальные положения  $q_{j0}$  и начальный момент времени  $t_0$ . Действительно, предполагая, что



$$\det \left| \frac{\partial q_j}{\partial p_{j0}} \right| \neq 0,$$

и выражая начальные импульсы  $(p_0)$  через  $(q)$ ,  $t$ ,  $(q_0)$  и  $t_0$ , получим

$$p_{j0} = p_{j0}(q_0, t_0, q, t), \quad j = 1, \dots, s.$$

Подставляя эти функции в (80.11), находим

$$S = S(q, t, q_0, t_0).$$

Вычислим вариацию  $S$  при фиксированных моментах времени  $t$  и  $t_0$ , используя определение (80.11):

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (81.11)$$

Если между измененными начальным и конечным положениями система движется по реальной траектории, то коэффициенты при каждой вариации  $\delta q_j$  в подынтегральном выражении будут равны нулю, и мы получаем

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (82.11)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{j=1}^s p_j dq_j - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_{j0}, \\ \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j. \end{aligned} \quad (83.11)$$

Нетрудно показать, что функция действия  $S$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Действительно, дифференцируя (80.11) по времени, находим

$$\frac{dS}{dt} = \mathbf{L}. \quad (84.11)$$

С другой стороны,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (85.11)$$

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathbf{L} = 0 \quad (86.11)$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{H}\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \quad (87.11)$$

Из (87.11) и (80.11) следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathbf{H}(t). \quad (88.11)$$

Теперь можно завершить доказательство теоремы. Так как согласно условию  $S_{AB} = S_{A'B'}$ , то из (79.11) с учетом (83.11) и (88.11) получаем

$$\mathbf{H}(t_A)\varepsilon T(q_A, t_A) - \sum_{j=1}^s p_j(t_A)\varepsilon Q_j(q_A, t_A) = \mathbf{H}(t_B)\varepsilon T(q_B, t_B) - \sum_{j=1}^s p_j(t_B)\varepsilon Q_j(q_B, t_B). \quad (89.11)$$

Равенство (89.11) можно переписать по-иному:

$$\mathbf{H}T - \sum_{j=1}^s p_j Q_j = \text{const}.$$

Теорема Нетер дает единый вывод законов сохранения. Действительно, полагая  $Q_j = 0$ ,  $T = 1$  (однородный сдвиг по времени), получаем сохранение гамильтониана, т. е. энергии системы. Если  $T = 0$ ,  $Q_j = 0$  при  $j \neq k$ ,  $Q_j = 1$  при  $j = k$ , то  $p_k = \text{const}$ , т. е. сохраняется обобщенный импульс.

Рассмотрим механическую систему, которая в некоторой инерциальной системе отсчета описывается лагранжианом

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^N U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

Здесь в качестве обобщенных переменных выбраны обычные координаты и импульсы, а гамильтониан совпадает с полной механической энергией системы  $N$  частиц. Поэтому инвариантность действия относительно преобразования  $t' = t + \varepsilon$ ,  $Q_j = 0$  при всех  $j$  приводит к сохранению полной энергии системы

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^N U_{ij} = E_0.$$

В этой инвариантности проявляется свойство пространства - времени: однородность времени.

Рассмотрим преобразование радиусов-векторов точек системы

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \varepsilon \vec{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (90.11)$$

Сумму в выражении (89.11), очевидно, можно записать в виде сумм скалярных произведений трехмерных векторов  $\vec{p}_i$  и  $\vec{Q}_i$ :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \vec{Q}_i) = \text{const}.$$

Выбирая все векторы  $\vec{Q}_i$  одинаковыми, а их декартовы компоненты равными соответственно

$$1) \vec{Q}_i = (1, 0, 0), \quad 2) \vec{Q}_i = (0, 1, 0), \quad 3) \vec{Q}_i = (0, 0, 1),$$

получим из (89.11) закон сохранения полного импульса системы:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{P}_0. \quad (91.11)$$

Инвариантность действия относительно преобразования (90.11) связана с важным свойством пространства – его однородностью.

Рассмотрим теперь преобразование координат, описывающее бесконечно малый поворот системы. Преобразование радиуса-вектора каждой точки системы имеет вид

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i], \quad (92.11)$$

где  $\vec{\varepsilon}$  - вектор бесконечно малого поворота. Роль  $\varepsilon \vec{Q}_i$  в этом случае играет вектор  $[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i]$ .

Подставив  $\varepsilon \vec{Q}_i$  в (89.11), получим

$$\sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \varepsilon \vec{Q}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i]) = \left( \vec{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] \right) = (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L}) = (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L}_0) = \left( \vec{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^N [\vec{r}_{i0} \cdot \vec{p}_{i0}] \right). \quad (93.11)$$

Отсюда следует закон сохранения полного момента импульса системы

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] = \vec{L}_0.$$

Инвариантность действия относительно преобразования (92.11) обусловлена изотропностью пространства, т. е. отсутствием в нем каких-либо выделенных направлений.

Важное значение теоремы Нетер состоит в том, что аналогичная теорема может быть сформулирована для любой гамильтоновой (или лагранжевой) системы и не только в классической механике. Теорема Нетер сформулирована и доказана в теории поля, где она играет еще более фундаментальную роль.

## Глава 12

# КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 12.1 МОДЕЛИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Описание движения твердого тела начнем с выбора модели. Как правило, используют две основные модели твердого тела. Во-первых, твердое тело можно рассматривать как дискретную систему  $N$  материальных точек и использовать для описания его движения соответствующие методы динамики систем. Другой подход связан с представлением твердого тела как континуума - сплошной среды и использует полевой подход для введения физических величин. В основном в этой главе мы будем использовать первую модель.

Термин "твердое тело" в дальнейшем мы будем применять к телу, движение которого не сопровождается заметными деформациями. Соответствующая дискретная модель в этом случае состоит из точек, расстояния между которыми при движении остаются неизменными. Пусть  $\vec{r}_i$  - радиус-вектор  $i$ -точки. Твердым телом называется такая система точек, для которой выполняются условия:

$$r^2_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = const$$

Дифференцирование этого соотношения по времени дает:

$$\left(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j\right) = 0$$

Откуда следует, что при движении твердого тела проекции скоростей любых двух его точек  $i$  и  $j$  на направление, задаваемое вектором  $\vec{r}_{ij}$ , соединяющим эти две точки, равны:

$$\left(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_i\right) = \left(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j\right). \quad (1.12)$$

Система  $N$  материальных точек, моделирующая движение твердого тела, обладает всего шестью степенями свободы. Действительно, для описания положения одной точки достаточно трех координат. Система из двух точек описывается шестью независимыми координатами, однако дополнительное условие - постоянство расстояния между ними - добавляет уравнение связи и уменьшает число независимых координат до пяти. Система из трех точек в общем случае описывается девятью координатами, однако, три уравнения связи уменьшают число независимых координат до шести. Дальнейшее увеличение точек в системе не увеличивает числа независимых координат, поскольку увеличение числа не-

зависимых координат сопровождается соответствующим увеличением числа независимых уравнений связи.

Учитывая, что система отсчета определяется как система координат, связанных с твердым телом, определим число независимых координат, определяющих ориентацию твердого тела по отношению к выбранной (лабораторной) системе. Положение твердого тела можно определить радиус-вектором  $\vec{R}$ , определяющим положение начала  $O'$  (полюса) движущейся системы, связанной с твердым телом, и координатами, определяющими его ориентацию, например, углами ориентации ортов системы координат, связанной с твердым телом. Поскольку положение полюса определяется тремя независимыми координатами, то задание ориентации твердого тела требует также трех независимых координат.

Движение твердого тела без изменения его ориентации называется поступательным.

Движение твердого тела, при котором его ориентация изменяется, но некоторая его точка  $O'$  остается неподвижной, называется вращением.

Произвольное движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию поступательного движения и вращения.

## 12.2. МАТРИЦА ПОВОРОТОВ

Рассмотрим подробнее вращение твердого тела, полагая для простоты, что полюс  $O'$  совпадает с началом  $O$  лабораторной системы.

Ориентацию твердого тела по отношению к лабораторной системе отсчета будем определять по ориентации ортов трехгранника, связанного с этим телом. Пусть

$\vec{n}_i = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  - орты лабораторной системы,

$\vec{e}_i = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  - орты системы, связанной с твердым телом.

Ориентация каждого орта  $\vec{e}_i$  задается тремя направляющими косинусами

$$a_{ik} = (\vec{e}_i, \vec{n}_k) = \cos \alpha_{ik}, \quad (2.12)$$

так что матрица направляющих косинусов является матрицей разложения ортов  $\vec{e}_i$  по ортам  $\vec{n}_k$ :

$$\vec{e}_i = a_{ik} \vec{n}_k. \quad (3.12)$$

Положение твердого тела, задаваемое ориентацией ортов  $\vec{e}_i$ , можно получить поворотом его из начального положения, когда орты, связанные с твердым телом, совпадают с ортами  $\vec{n}_k$  лабораторной системы, поэтому матрица направляющих косинусов называется матрицей поворотов.

Так как при движении твердого тела расстояния между любыми его точками остаются неизменными, то длины векторов  $\vec{e}_i$  и углы между ними остаются неизменными. Три уравнения, выражающие сохранение длин векторов

$$a_{1k}a_{1k} = 1, \quad a_{2k}a_{2k} = 1, \quad a_{3k}a_{3k} = 1,$$

и три уравнения, выражающие условия ортогональности этих векторов

$$a_{1k}a_{2k} = 0, \quad a_{1k}a_{3k} = 0, \quad a_{2k}a_{3k} = 0,$$

уменьшают число независимых элементов матрицы поворотов до трех.

Линейное преобразование, сохраняющее ортогональность и длину векторов, в линейной алгебре называется ортогональным. Матрицы, задающие эти преобразования в выбранном базисе, называются ортогональными матрицами. Условие ортогональности базисных векторов при повороте твердого тела удобно записать в тензорной форме

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = (a_{im}\vec{n}_m, a_{ks}\vec{n}_s) = a_{im}a_{km} = \delta_{ik},$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование.  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера.

Если в этом выражении заменить вторую матрицу транспонированной:

$$a_{km} = \tilde{a}_{mk},$$

то условие ортогональности может быть записано в форме произведения матриц

$$a_{im}\tilde{a}_{mk} = \delta_{ik}. \quad (4.12)$$

Но такое равенство определяет матрицу, обратную к данной:

$$a_{im}a^{-1}_{mk} = \delta_{ik}.$$

Аналогично можно показать, что  $\tilde{a}_{im}a_{mk} = \delta_{ik}$ .

Это означает, что матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной.

Поскольку определители матриц  $a_{mk}$  и  $\tilde{a}_{mk}$  равны, то из условия ортогональности (4.12) следует, что квадрат определителя ортогональной матрицы равен единице. Действительно,

$$\det(a_{im}\tilde{a}_{mk}) = \det(a_{im}) \cdot \det(\tilde{a}_{mk}) = (\det a_{im})^2 = \det \delta_{ik} = 1,$$

то есть

$$\det(a_{im}) = \pm 1. \quad (5.12)$$

Ортогональные преобразования разделяются на два типа. К первому относятся преобразования, описываемые в заданном базисе матрицами с определителем, равным плюс единице. Такие преобразования, называемые собственными, соответствуют поворотам твердого тела. В частности, тождественное преобразование является частным случаем преобразования поворота. Преобразования, описываемые матрицами с определителем, равным минус единице, называются несобственными и являются преобразованиями инверсии. Преобразования инверсии не соответствуют реальным движениям твердого тела и поэтому не рассматриваются в кинематике твердого тела.

Таким образом, любой поворот твердого тела в пространстве может быть описан в заданном базисе ортогональной матрицей, определитель которой равен плюс единице. Справедливо и обратное утверждение: любая ортогональная матрица с определителем, равным плюс единице, описывает в заданном базисе поворот твердого тела.

Примером может служить матрица поворотов на заданный угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ$ :

$$a_{ik}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Поворот твердого тела приводит к изменению положения его точек по отношению к лабораторной системе. Если в начальном состоянии твердого тела положение некоторой его точки  $M$  определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_M = x\vec{n}_1 + y\vec{n}_2 + z\vec{n}_3 = x_i\vec{n}_i,$$

то после поворота ее положение определяется в этой же системе радиус-вектором

$$\vec{r}'_M = x'\vec{n}_1 + y'\vec{n}_2 + z'\vec{n}_3.$$

В системе отсчета, связанной с твердым телом, координаты рассматриваемой точки не изменились, поэтому ее радиус-вектор после поворота можно записать так:

$$\vec{r}'_M = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i.$$

Вектор перемещения точки  $M$  при повороте твердого тела можно представить в виде:

$$\delta\vec{r} = \vec{r}'_M - \vec{r}_M = x(\vec{e}_1 - \vec{n}_1) + y(\vec{e}_2 - \vec{n}_2) + z(\vec{e}_3 - \vec{n}_3)$$

Проекции вектора перемещения на орты лабораторной системы  $\vec{n}_i$  имеют вид:

$$\delta x_i = (\delta \vec{r}, \vec{n}_i) = x_k (\vec{e}_k - \vec{n}_k, \vec{n}_i) = x_k (a_{ki} - \delta_{ki}), \quad (7.12)$$

а на орты системы, связанной с твердым телом -

$$\delta \tilde{x}_i = (\delta \vec{r}, \vec{e}_i) = x_k (\vec{e}_k - \vec{n}_k, \vec{e}_i) = x_k (\delta_{ki} - a_{ik}). \quad (8.12)$$

Перемещение точки  $M$  твердого тела зависит как от заданного преобразования, так и от ее положения относительно твердого тела. В частности, при любом повороте твердого тела полюс  $O'$  остается неподвижным.

Осью вращения твердого тела называется прямая, принадлежащая твердому телу и проходящая через полюс, все точки которой остаются неподвижными при заданном преобразовании поворота. Справедливо следующее утверждение.

*Для любого поворота твердого тела существует ось вращения и притом только одна.*

Для доказательства рассмотрим поворот твердого тела, заданный в базисе  $\vec{n}_i$  матрицей поворотов  $a_{ik}$ . Перемещение точек твердого тела определяется выражением (8.12), из которого следует, что неподвижные (относительно лабораторной системы) точки  $\vec{x}_k$  определяются условием:

$$\delta \tilde{x}_i = (a_{ik} - \delta_{ik}) \vec{x}_k = 0.$$

Но это условие является системой уравнений для определения компонент собственного вектора  $\vec{x}_i$  преобразования поворота  $a_{ik}$  с собственным значением  $\lambda$ , равным единице. Таким образом, собственный вектор преобразования  $\vec{x}_i$  определяет ось вращения твердого тела.

Нетривиальные решения данной системы существуют в том случае, когда характеристическое уравнение

$$\det(a_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$$

имеет действительное решение.

Характеристическое уравнение является кубическим относительно  $\lambda$  и, следовательно, имеет хотя бы одно действительное решение, поскольку все коэффициенты уравнения - действительные числа. Но преобразование поворота не изменяет длину любого вектора, следовательно, собственное значение этого преобразования - плюс единица. С учетом этого замечания и условия  $\det a_{ik} = 1$ , характеристическое уравнение можно привести к виду:



$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)\lambda + 1] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках не обращается в нуль для любых преобразований поворота, кроме тождественного. Действительно, любая ортогональная матрица поворота  $a_{ik}$  подобна матрице поворотов (6.12), то есть существует базис, в котором матрица преобразования имеет указанный вид /см. например, И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М. 1966/. Так как сумма диагональных элементов подобных матриц совпадает, то для произвольной матрицы справедливо равенство:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 \cos \varphi.$$

Отсюда следует, что квадратное уравнение для  $\lambda$  при любых  $\varphi \neq 0$  не имеет решений в действительной области. Таким образом, собственное значение матрицы поворотов единственно  $\lambda = +1$ , а следовательно, собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, задает ось вращения единственным образом.

Доказанное утверждение называется теоремой Эйлера.

Произведение собственных ортогональных матриц является также собственной ортогональной матрицей, которая определяет в заданном базисе поворот твердого тела. Поскольку произведение матриц некоммутативно, то результирующий поворот зависит от порядка, в котором выполняются составляющие его элементарные повороты.

На основании теоремы Эйлера можно утверждать, что преобразование, полученное любой последовательностью заданных поворотов твердого тела, может быть получено с помощью единственного поворота вокруг заданной оси. Ось вращения такого поворота определяется собственным вектором матрицы, равной произведению матриц, описывающих в данном базисе составляющие повороты.

### 12.3. УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Теорема Эйлера позволяет представить произвольный поворот твердого тела как последовательность трех поворотов вокруг заданных осей. В кинематике твердого тела распространена система параметров, задающих такие повороты, называемая углами Эйлера. В этом случае матрица произвольного поворота в заданном базисе представляется в виде произведения трех матриц, каждая из которых зависит только от одного параметра.

Пусть  $\vec{n}_i$  - орты лабораторной системы, а  $\vec{e}_i$  - орты системы, связанной с твердым телом, как показано на рис. 1.12. Предполагается, что система ортов  $\vec{e}_i$  первоначально совпадала с лабораторной системой  $\vec{n}_i$ , а затем была приведена в указанное состояние путем последовательных поворотов, выполненных в следующем порядке.

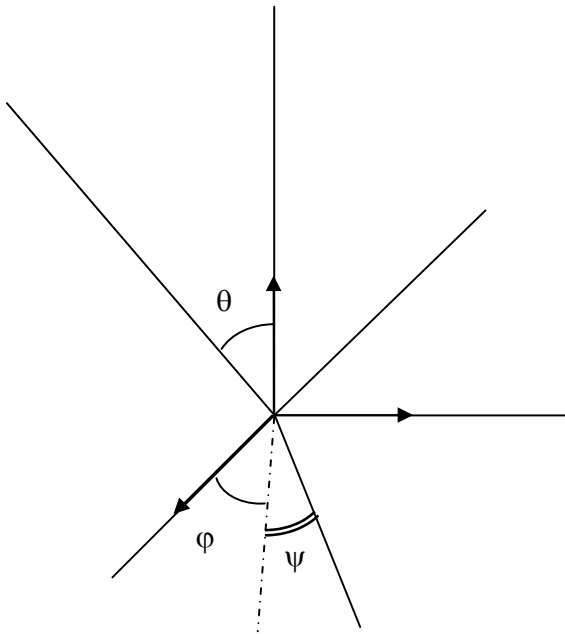


Рис. 1.12

1. Поворот вокруг оси  $\vec{e}_3(\vec{n}_3)$  на угол  $\varphi$ . При этом орт  $\vec{e}_1$  займет положение в плоскости  $XOY$ , определяемое на рисунке ортом  $\vec{e}_\xi$  (пунктир). Этот орт определяет линию узлов, а угол  $\varphi$  называется *углом прецессии*.
2. Поворот твердого тела вокруг орта  $\vec{e}_\xi$  (оси узлов) на угол  $\theta$ . При этом орт  $\vec{e}_3$  займет положение, указанное на рисунке, а орт  $\vec{e}_2$  выйдет из плоскости  $OXY$ . Угол  $\theta$  называется *углом нутации*.
3. Поворот вокруг орта  $\vec{e}_3$  на угол  $\psi$  так, что орт  $\vec{e}_1$  выйдет из плоскости  $OXY$ . Угол  $\psi$  называется *углом собственного вращения*.

Поскольку каждый поворот характеризуется простой матрицей поворота вокруг одной из осей, матрицу полного поворота легко получить как произведение этих матриц.

Первое преобразование определяется матрицей поворота вокруг орта  $\vec{e}_3$  на угол  $\varphi$  (6.12):

$$\mathcal{A}_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поворот вокруг линии узлов, оставляющий неподвижным орт  $\vec{e}_1$ , определяется матрицей  $\mathcal{A}_\vartheta$ :

$$\mathcal{A}_\vartheta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix}$$

Последнее преобразование - поворот вокруг орта  $\vec{e}_3$  на угол  $\psi$  - описывается матрицей  $\mathcal{A}_\psi$ , устроенной также, как и матрица  $\mathcal{A}_\varphi$ :

$$\mathcal{A}_\psi = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Результирующий поворот определяется матрицей  $\mathcal{A}$ , равной произведению матриц, взятых в той последовательности, в которой выполнялись повороты:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_\vartheta \mathcal{A}_\varphi,$$

или в тензорных обозначениях

$$a_{ik} = a_{is}^\psi a_{sm}^\vartheta a_{mk}^\varphi.$$

Выполняя вычисления, получим выражение для матрицы поворота:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi & \sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad (9.12)$$

Для выполнения обратного преобразования достаточно взять транспонированную матрицу.

## 12.4. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если рассматривать малые повороты, матрица которых близка к единичной

$$a_{sm} = \delta_{sm} + \varepsilon_{sm}, \text{ где } \varepsilon_{sm} \ll 1,$$

то матрицу  $\varepsilon_{sm}$  можно считать антисимметричной:

$$\varepsilon_{sm} = -\varepsilon_{ms}. \quad (10.12)$$

Это следует из условия ортогональности преобразования (а), которое приводит к уравнению

$$(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik})(\delta_{mk} + \varepsilon_{mk}) = \delta_{im},$$

из которого с точностью до линейных по  $\varepsilon_{ik}$  членов и вытекает условие (10.12).

В отличие от конечных поворотов, результат последовательных малых поворотов не зависит от порядка их выполнения. Это вытекает из того, что произведение матриц малых поворотов не зависит от порядка сомножителей с точностью до линейных членов, т. е. эти матрицы с указанной точностью коммутируют.

Как следует из (7.12), координаты точки  $M$  твердого тела, заданные относительно лабораторной системы, при малых поворотах преобразуются с помощью матрицы  $\varepsilon_{ms}$ :

$$dx_s = \varepsilon_{ms} x_m.$$

Очевидно, что закон преобразования справедлив для любого вектора, заданного фиксированными координатами в системе, связанной с твердым телом, а не только для радиус-вектора какой-либо точки твердого тела.

Антисимметричный тензор  $\varepsilon_{ms}$  имеет лишь три отличные от нуля компоненты, поэтому ему можно сопоставить вектор, точнее псевдовектор  $d\vec{\varphi} = \{d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3\}$ , компоненты которого в лабораторной системе определены соотношениями

$$d\varphi_1 = \varepsilon_{23}, \quad d\varphi_2 = \varepsilon_{31}, \quad d\varphi_3 = \varepsilon_{12}.$$

Их удобно записывать в тензорном виде, вводя единичный антисимметричный псевдотензор третьего ранга  $\varepsilon_{ijk}$ , определяемый в любом базисе следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= 1, \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} &= -1, \end{aligned}$$

а остальные компоненты тензора  $\varepsilon_{ijk}$  равны нулю.

Из этого определения вытекают следующие соотношения, полезные для приложений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \\ \varepsilon_{imk} \varepsilon_{lmk} &= 2\delta_{il}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Используя введенный тензор, псевдовектор  $d\varphi_i$  можно записать как свертку  $\varepsilon_{ijk}$  и тензора  $\varepsilon_{jk}$ :

$$d\varphi_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jk}. \quad (12.12)$$

Если твердое тело подвергается двум последовательным малым поворотам, которым сопоставлены векторы  $d\varphi_i^{(1)}$  и  $d\varphi_i^{(2)}$  соответственно, то результирующий поворот описывается суммой, которая, в соответствии с правилами сложения векторов, не зависит от порядка выполнения поворотов:

$$d\varphi_i = d\varphi_i^{(1)} + d\varphi_i^{(2)} = d\varphi_i^{(2)} + d\varphi_i^{(1)}.$$

Использование тензора  $\varepsilon_{ijk}$  упрощает алгебраические операции над векторами. Так, векторное произведение двух векторов  $A_j$  и  $B_k$  с помощью введенного тензора представляется в виде свертки

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Соответствие между антисимметричным тензором  $\varepsilon_{jk}$  и вектором  $d\varphi_i$  взаимно однозначное, так что псевдовектору  $d\varphi_i$  соответствует тензор

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jkm} d\varphi_m. \quad (13.12)$$

Справедливость этого равенства легко доказывается прямой подстановкой, с учетом соотношения (11.12).

Учитывая приведенные выражения, запишем приращения компонент радиус-вектора точки  $M$  твердого тела, вызванные его поворотом:

$$dx_s = \varepsilon_{js} x_j = \varepsilon_{smj} d\varphi_m x_j$$

или в векторной форме

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Приведенные соотношения позволяют ввести вектор угловой скорости,

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

С помощью этого определения вектор скорости точки  $M$  твердого тела можно вычислить как векторное произведение:

$$\dot{\vec{r}} = [\vec{\Omega}, \vec{r}] \quad (14.12)$$

Угловая скорость является псевдовектором, однако в классической механике принято называть эту величину вектором, так как преобразование инверсии в кинематике твердого тела не рассматривается. Формула, определяющая распределение скоростей точек произвольно движущегося твердого тела, называется формулой Эйлера. Полученная формула (14.12) является частным случаем формулы Эйлера, соответствующим движению тела с одной неподвижной точкой.

Очевидно, что соотношение (14.12) распространяется на любые векторы  $\vec{A}$ , проекции которых на орты  $\vec{e}_i$  остаются постоянными при вращении твердого тела. В частности, это соотношение справедливо и для ортов  $\vec{e}_i$ , связанных с твердым телом:

$$\dot{\vec{e}}_i = [\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_i]. \quad (15.12)$$

С помощью псевдотензора  $\varepsilon_{imk}$  это соотношение может быть записано в форме:

$$\dot{\vec{e}}_i = \varepsilon_{imk} \Omega_k \vec{e}_m, \quad (16.12)$$

где  $\Omega_k = (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_k)$  - компоненты вектора угловой скорости в системе, связанной с твердым телом.

Отсюда легко определить компоненты вектора угловой скорости, по заданной матрице поворотов  $a_{ik}$ .

Действительно, если матрица поворотов зависит от времени, то ориентация ортов  $\vec{e}_i$  изменяется по отношению к лабораторной системе с течением времени по закону:

$$\vec{e}_i(t) = a_{ik}(t) \vec{n}_k.$$

Дифференцируя это выражение по времени (при постоянных ортах  $\vec{n}_k$ ), и переходя с помощью обратной матрицы от ортов  $\vec{n}_k$  к ортам  $\vec{e}_m$ , получим:

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \dot{a}_{ik}(t) \vec{n}_k = \dot{a}_{ik} a_{mk} \vec{e}_m.$$

Сравнивая это выражение с (16.12), приходим к соотношению:

$$\varepsilon_{imk} \Omega_k = \dot{a}_{ik} a_{mk}.$$

Умножая его на  $\varepsilon_{ims}$  и проводя суммирование по повторяющимся индексам  $i, m$  с помощью соотношения (14.12), найдем явное выражение для компонент вектора угловой скорости (в системе, связанной с твердым телом)

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sim} \dot{a}_{ik} a_{mk}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно из соотношения ортогональности (7.12), дифференцируя его по времени:

$$\dot{a}_{ik} a_{mk} + a_{ik} \dot{a}_{mk} = 0.$$

Отсюда следует, что тензор  $C_{im} = \dot{a}_{ik} a_{mk}$  является антисимметричным:

$$C_{im} = -C_{mi},$$

что позволяет ввести вектор  $\Omega_s$ , характеризующий скорость изменения ориентации ортов при движении твердого тела, путем свертки этого тензора с псевдотензором  $\varepsilon_{sim}$ :

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sim} C_{im} = \frac{1}{2} \varepsilon_{sim} \dot{a}_{ik} a_{mk},$$

который совпадает с вектором угловой скорости, введенным ранее.

Учитывая связь между компонентами антисимметричного тензора и псевдовектора (13.12), с помощью соотношений (14.12) можно записать выражение для скорости изменения ортов подвижной системы в виде, совпадающем с полученным ранее (+):

$$\dot{\vec{e}}_i = \dot{a}_{ik} a_{mk} \vec{e}_m = \varepsilon_{ims} \Omega_s \vec{e}_m.$$

Если компоненты матрицы поворотов  $a_{ik}$  зависят от некоторых параметров  $q_n$  - обобщенных координат, то компоненты вектора угловой скорости  $\Omega_s$  определяются выражением:

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sim} \dot{a}_{ik} a_{mk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{sim} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_s} a_{mk} \dot{q}_s.$$

В частности, для углов Эйлера это дает

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sim} \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial \psi} \dot{\psi} \right) a_{mk}.$$

Приведенное выражение, позволяющее вычислить компоненты вектора угловой скорости для произвольной матрицы поворота, довольно громоздко. Если же поворот может быть представлен как последовательность элементарных поворотов вокруг заданных осей, то удобнее вычислять угловую скорость, пользуясь принципом суперпозиции. Так, для углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  угловую скорость можно представить в виде суммы:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\varphi + \vec{\Omega}_\vartheta + \vec{\Omega}_\psi,$$

где слагаемые равны, соответственно,

$$\vec{\Omega}_\varphi = \dot{\varphi} \vec{n}_3, \quad \vec{\Omega}_\vartheta = \dot{\vartheta} \vec{n}_\xi, \quad \vec{\Omega}_\psi = \dot{\psi} \vec{e}_3,$$

а орт  $\vec{n}_\xi$  может быть представлен в виде:

$$\vec{n}_\xi = \vec{n}_1 \cos \varphi + \vec{n}_2 \sin \varphi.$$

Таким образом, вектор угловой скорости представляется суммой

$$\vec{\Omega} = \dot{\vartheta} \cos \varphi \vec{n}_1 + \dot{\vartheta} \sin \varphi \vec{n}_2 + \dot{\varphi} \vec{n}_3 + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (17.12)$$

При составлении динамических уравнений удобно использовать вектор угловой скорости, определенный проекциями на орты  $\vec{e}_i$  движущейся системы:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{\Omega}) = \dot{\vartheta} \cos \varphi (\vec{e}_i \cdot \vec{n}_1) + \dot{\vartheta} \sin \varphi (\vec{e}_i \cdot \vec{n}_2) + \dot{\varphi} (\vec{e}_i \cdot \vec{n}_3) + \dot{\psi} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_3).$$

Учитывая, что  $(\vec{e}_i \cdot \vec{n}_k) = a_{ik}$ , где матрица поворотов дается выражением (9.12), а  $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_3) = \delta_{i3}$ , получим явный вид компонент вектора угловой скорости:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (\Omega \cdot \vec{e}_1) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= (\Omega \cdot \vec{e}_2) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= (\Omega \cdot \vec{e}_3) = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (18.12)$$

Аналогичным образом с помощью представления (17.12)) можно вычислить и проекции вектора угловой скорости на орты лабораторной системы. В этом случае они определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= (\Omega \cdot \vec{n}_1) = \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \Omega_y &= (\Omega \cdot \vec{n}_2) = \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \Omega_z &= (\Omega \cdot \vec{n}_3) = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (19.12)$$

Полученные выражения называются *кинематическими уравнениями Эйлера*.

## 12.5. ПОЛЕВОЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ

### ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела можно описывать в модели сплошной среды, предполагая, что кинематические характеристики ее являются полевыми переменными. Такой подход позволяет использовать при описании движения твердого тела дифференциальный аппа-



рат теории поля. Воспользуемся для описания сплошной среды методом Эйлера. Предположим, что в окрестности любой точки пространства  $x_i$  можно указать такой объем  $\Delta v$ , что физические характеристики среды с заданной точностью либо не зависят от формы, размеров и способа выделения этого объема, либо пропорциональны величине этого объема. Такой объем называется элементарным. Во втором случае вводится коэффициент пропорциональности, не зависящий от элементарного объема, называемый плотностью физической величины. Физические величины или их плотности, относящиеся к данному элементарному объему, зависят лишь от положения точки наблюдения и образуют поля физических величин.

Пусть движение сплошной среды происходит так, что в любой точке пространства  $x_i$  в каждый момент времени  $t$  существует элементарный объем, в котором скорость движущегося вещества с заданной точностью можно считать одинаковой. В таком случае в пространстве можно ввести поле скоростей движущейся среды:

$$v_i = v_i(x_k, t).$$

Если движущаяся среда является твердым телом, то для любых двух ее точек, принадлежащих элементарным объемам  $\Delta v_1 = \Delta v(x_k)$  и  $\Delta v_2 = \Delta v(x_k + dx_k)$ , для любого  $t$  справедливо равенство (1.12).

Будем считать поле скоростей дифференцируемой функцией своих аргументов. В линейном по  $dx_k$  приближении это приведет к условию недеформируемости сплошной среды в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = 0.$$

Выполнение этого условия для любых  $D_{ik} = dx_i dx_k$  возможно в двух случаях.

1. Вектор скорости не зависит от координат:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0.$$

В этом случае все точки твердого тела движутся с одинаковыми скоростями. Такое движение называется поступательным.

2. Движение не является поступательным.

Поскольку тензор  $D_{ik}$  является симметричным, то в этом случае тензор  $A_{ki} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  является

антисимметричным для любой точки сплошной среды, то есть:

$$A_{ki} \equiv -A_{ik}.$$

Сопоставим антисимметричному тензору псевдовектор, образующий векторное поле:

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikm} A_{km} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikm} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}$$

или в векторных обозначениях

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}.$$

Для твердого тела поле вектора  $\vec{\Omega}$  не зависит от координат, то есть является глобальной характеристикой движения. Чтобы показать это, вычислим его производную по координатам:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_n} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikm} \frac{\partial}{\partial x_n} A_{km}.$$

Но тензор  $A_{km} = \frac{\partial v_m}{\partial x_k}$  является антисимметричным в любой точке:

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_k} \equiv -\frac{\partial v_k}{\partial x_m}, \quad (20.12)$$

что удобно представить в явной форме:

$$A_{km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right).$$

Выполняя дифференцирование этого тензора с учетом условия (20.12) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} A_{km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \right) = 0$$

Отсюда следует, что вектор скорости может быть только линейной функцией координат:

$$v_i = A_{ki} x_k + v_i^0.$$

Учитывая, что  $A_{ki} = \varepsilon_{kim} \Omega_m$ , этому соотношению можно придать следующий вид:

$$v_i = \varepsilon_{imk} \Omega_m x_k + v_i^0.$$

Векторная форма этого соотношения

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}] + \vec{v}^0$$

известна как *формула Эйлера*, частный случай которой был получен нами ранее (14.12).

Таким образом, введенный нами вектор  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$  является вектором угловой скорости, введенным ранее.

Если движение твердого тела является вращением, при котором скорость одной из его точек остается равной нулю

$$v_i(0) = v_i^0 = 0,$$

то вектор  $\Omega_i$  в любой момент определяет ось вращения, проходящую через начало координат. Такая ось называется *мгновенной осью вращения*.

Она описывает в пространстве коническую поверхность, называемую неподвижным аксоидом. Коническая поверхность, которую ось вращения описывает относительно твердого тела, называется подвижным аксоидом. Эти поверхности в любой момент времени касаются друг друга по образующей, которая совпадает с мгновенной осью вращения.

Если при произвольном движении твердого тела известны скорость  $\vec{v}^0(t)$  и его угловая скорость  $\vec{\Omega}(t)$ , то для случая  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{v}^0) = 0$  формула Эйлера позволяет определить положения точек твердого тела, скорость которых в данный момент времени равна нулю, то есть *мгновенных центров вращения*  $x_i^0$ :

$$x_i^0 = \varepsilon_{imk} \Omega_m v_k^0 / \Omega^2.$$

Рассмотренный случай реализуется, в частности, при плоском движении твердого тела, когда вектор любой точки в любой момент времени лежит в плоскости, неподвижной относительно лабораторной системы.

## 12.6. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

До сих пор мы рассматривали движение материальной точки относительно некоторой выбранной системы отсчета. Результаты, полученные при описании движения твердого тела, позволяют решить вопрос о вычислении скоростей и ускорений материальной точки относительно произвольной подвижной системы отсчета, если задано движение точки в некоторой (лабораторной) системе и известно, как движется подвижная

система.

Поскольку системой отсчета называют тело отсчета (твердое тело), связанную с ним систему координат и часы, то предполагая, что время в лабораторной и подвижной системах течет одинаково, нетрудно получить преобразование скоростей и ускорений. Пусть в лабораторной системе  $OXYZ$ , оси которой определены ортами  $\vec{n}_i$ , движение точки  $M$  задается радиусом-вектором  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ :

$$\vec{r} = x_i \vec{n}_i,$$

а в системе  $O'X'Y'Z'$ , направление осей которой определяется ортами  $\vec{e}_i$ , закон движения

$$\vec{r}' = x'_i \vec{e}_i.$$

Движение точки  $O'$  относительно системы  $OXYZ$  предполагается заданным с помощью радиуса-вектора

$$\vec{R} = \vec{R}(t) = X_i \vec{n}_i,$$

а ориентация ортов  $\vec{e}_i$  по отношению к лабораторной системе определяется матрицей поворотов  $a_{ik}$ :

$$\vec{e}_i = a_{ik} \vec{n}_k.$$

Справедливо равенство

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t),$$

или

$$x_i \vec{n}_i = X_i \vec{n}_i + x'_i \vec{e}_i \quad (21.12)$$

Скоростью точки относительно выбранной системы отсчета называется вектор, компоненты которого равны производным радиуса-вектора точки в данной системе при фиксированных ортах, т. е. в лабораторной системе вектор скорости определяется уравнением

$$\vec{v} = \dot{x}_i \vec{n}_i,$$

а в движущейся системе скорость точки —

$$\vec{v}' = \dot{x}'_i \vec{e}_i$$

Для вычисления скорости в одной системе, если известна скорость точки в другой системе, продифференцируем соотношение (21.12), учитывая, что  $\vec{e}_i = a_{ik} \vec{n}_k$ :

$$\dot{x}_i \vec{n}_i = \dot{X}_i \vec{n}_i + \dot{x}'_i \vec{e}_i + x'_i \dot{a}_{ik} \vec{n}_k \quad (22.12)$$

Последнее слагаемое в правой части равенства удобно представить, вводя орты  $\vec{e}_i$  с помощью транспонированной матрицы:

$$\vec{n}_k = a_{mk} \vec{e}_m,$$

$$x'_i \dot{a}_{ik} \vec{n}_k = x'_i \dot{a}_{ik} a_{mk} \vec{e}_m$$

Вводя псевдовектор угловой скорости вращения движущейся системы

$$\Omega_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{nim} \dot{a}_{ik} a_{mk},$$

запишем это слагаемое в виде

$$x'_i \dot{a}_{ik} \vec{n}_k = \varepsilon_{imn} \Omega_n x'_i \vec{e}_m \quad (23.12)$$

С учетом соотношения (23.12) выражение (22.12) можно записать в векторном виде:

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}' + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']. \quad (24.12)$$

Здесь  $\vec{v}'$  — относительная скорость (относительно движущейся системы отсчета), а сумма

$$\vec{V}_0 + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']$$

называется переносной скоростью.

Очевидно, что структура полученной формулы не связана с дифференцированием именно радиуса-вектора. Любой вектор  $\vec{A}$ , заданный компонентами  $a_i$  по отношению к лабораторной системе, будет при дифференцировании подчиняться тому же правилу. Действительно, пусть

$$\vec{A} = a_i \vec{n}_i = a'_i \vec{e}_i.$$

Вычисляя производную при фиксированных ортах  $\vec{n}_i$ , получим

$$\dot{\vec{A}} = \dot{a}_i \vec{n}_i = \dot{a}'_i \vec{e}_i + a'_i \dot{a}_{ik} a_{mk} \vec{e}_k,$$

или в векторных обозначениях

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d'}{dt} \vec{A} + [\vec{\Omega} \cdot \vec{A}] \quad (25.12).$$

где введен оператор дифференцирования при постоянных ортах  $\frac{d'}{dt}$ , а  $\Omega_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{nim} \dot{a}_{ik} a_{mk}$  — угловая скорость вращения движущейся системы.

Учитывая полученную формулу (25.12), вычислим ускорения точки относительно лабораторной системы при сделанных ранее предположениях:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{d'}{dt} \vec{v}' + [\vec{\Omega} \cdot \vec{v}'] + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'] + \left[ \vec{\Omega} \cdot \frac{d'}{dt} \vec{r}' \right] + [\vec{\Omega} \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']].$$

Собирая подобные члены, получим формулу Кориолиса

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \left[ \dot{\vec{\Omega}} \cdot \vec{r}' \right] + [\vec{\Omega} \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']] + 2[\vec{\Omega} \cdot \vec{v}'] + \vec{a}'. \quad (26.12)$$

Здесь  $\vec{a}'$  — относительное ускорение, сумма  $\vec{a}_{неп}$ :

$$\vec{a}_{неп} = \vec{a}_0 + \left[ \dot{\vec{\Omega}} \cdot \vec{r}' \right] + [\vec{\Omega} \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']]$$

называется переносным ускорением, а член, линейный по скорости относительного движения  $\vec{v}'$ , называется кориолисовым ускорением. Слагаемое в относительном ускорении, содержащее двойное векторное произведение, называется осеостремительным ускорением, так как оно направлено к оси вращения системы отсчета. Раскрывая двойное векторное произведение по известному правилу

$$[\vec{\Omega} \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']] = \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'\Omega^2$$

и вводя единичный вектор  $\vec{n}$ , определяющий направление угловой скорости, двойное векторное произведение можно представить в виде

$$[\vec{\Omega} \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']] = -\Omega^2 \vec{\rho},$$

где

$$\vec{\rho} = \vec{r}' - (\vec{n} \cdot \vec{r}')\vec{n}$$

определяет расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки.

## ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

### I 13.1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ В ТЕОРИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривая твердое тело как систему материальных точек, для описания его движения можно применить теоремы динамики систем со связями. Во многих задачах удобно рассматривать произвольное движение твердого тела как суперпозицию поступательного движения и вращения его вокруг центра масс. Поскольку движение центра масс твердого тела, описываемое теоремой об изменении импульса, ничем не отличается от движения материальной точки, подробно изученного нами ранее, рассмотрим более детально движение твердого тела с одной неподвижной точкой.

Пусть  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор точки  $m_i$  твердого тела. Так как скорость этой точки относительно системы, связанной с твердым телом, равна нулю, то из формулы Эйлера (14.12) следует

$$\dot{\vec{r}}_i = [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i], \quad (1.13)$$

где  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость тела. Вектор кинетического момента в этом случае определяется формулой

$$\vec{M} = \sum_i m_{(i)} [\vec{r}_{(i)} \cdot [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_{(i)}]]. \quad (2.13)$$

Для упрощения формул перейдем к тензорной форме записи:

$$M_k = \sum_{(i)} m_{(i)} \varepsilon_{klm} x_l^{(i)} \varepsilon_{mnp} \Omega_n x_p^{(i)}. \quad (3.13)$$

Подставляя значения координат и проводя суммирование по повторяющемуся индексу  $m$  с учетом соотношений (1.12), получим выражение для вектора кинетического момента:

$$M_k = \sum_{(i)} m_{(i)} (x_l^{(i)} x_l^{(i)} \delta_{kn} - x_k^{(i)} x_n^{(i)}) \Omega_n. \quad (4.13)$$

Величина, стоящая под знаком суммы, является симметричным тензором второго ранга и называется тензором инерции:

$$J_{kn} = \sum_{i=1}^N m_{(i)} (x_l^{(i)} x_l^{(i)} \delta_{kn} - x_k^{(i)} x_n^{(i)}) \quad (5.13)$$

Этот тензор характеризует распределение масс твердого тела.

С помощью тензора инерции выражение для кинетического момента представляется в виде

$$M_k = J_{kn} \Omega_n. \quad (6.13)$$

Теорема об изменении кинетического момента твердого тела, имеющего неподвижную точку, с помощью введенного тензора инерции в лабораторной системе представляется уравнением:

$$\frac{d}{dt}(J_{kn}\Omega_n) = L_k \quad (7.13)$$

где  $L_k$  — момент внешних сил, действующих на тело.

Кинетическая энергия твердого тела в случае вращения с одной неподвижной точкой также может быть представлена с помощью тензора инерции. Действительно, по определению кинетическая энергия твердого тела как системы материальных точек определяется выражением:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(i)} m_{(i)} \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{(i)} m_{(i)} [\Omega \vec{r}_i]^2. \quad (8.13)$$

Переходя к тензорным обозначениям, получим выражение для кинетической энергии вращающегося тела, записанное с помощью тензора инерции:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(i)} m_{(i)} \varepsilon_{klm} \Omega_l x_m^{(i)} \varepsilon_{knp} \Omega_n x_p^{(i)} = \frac{1}{2} J_{mn} \Omega_m \Omega_n. \quad (9.13)$$

Поскольку в выбранной модели деформации отсутствуют, то мощность внутренних сил равна нулю, так что изменение кинетической энергии обусловлено лишь внешними силами, действующими на тело:

$$\frac{d}{dt} T = W^{ext}, \quad (10.13)$$

где  $W^{ext} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ext} \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \left( \left[ \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{ext} \right] \cdot \vec{\Omega} \right) = \left( \vec{\Omega} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{L}_i^{ext} \right)$ .

В тензорных обозначениях теорема об изменении кинетической энергии твердого тела имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{J_{mn} \Omega_m \Omega_n}{2} \right) = \Omega_m \sum_{i=1}^N L_{(i)m}^{ext}. \quad (11.13)$$

Если среди действующих на тело внешних сил имеются потенциальные, то их действие можно учесть, с помощью потенциальной энергии  $U^{ext}$ . В этом случае вместо теоремы об изменении кинетической энергии удобно использовать теорему об изменении полной энергии  $E = T + U^{ext}$  твердого тела:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ext} \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} + \left( \vec{\Omega} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{L}_i^{ext} \right). \quad (12.13)$$

## 13.2. ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ И ЕГО СВОЙСТВА



Введенный нами в предыдущем разделе тензор инерции системы точек

$$J_{kn} = \sum_{i=1}^N m_{(i)} (x_l^{(i)} x_l^{(i)} \delta_{kn} - x_k^{(i)} x_n^{(i)})$$

для твердого тела, плотность которого  $\rho = \rho(x_s)$ , выражается с помощью интеграла

$$J_{kn} = \int dV \rho(x_s) [x_l x_l \delta_{kn} - x_k x_n]. \quad (13.13)$$

В лабораторной системе отсчета компоненты тензора инерции являются функциями времени, поскольку распределение масс, характеризуемое координатами точек  $x_k^{(i)}$ , меняется при вращении. Однако в системе отсчета, связанной с твердым телом, эти координаты остаются неизменными, так что компоненты тензора в этой системе — постоянные величины, определяемые лишь распределением масс и не зависящие от каких-либо характеристик движения. Как следует из определения, тензор инерции является симметричным тензором второго ранга, имеющим шесть независимых компонент. Диагональные компоненты тензора называются осевыми моментами инерции, а недиагональные — центробежными моментами инерции.

Соответствующим выбором осей, связанных с твердым телом, можно привести тензор инерции к диагональному виду

$$J_{kn} = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{vmatrix}, \quad (14.13)$$

причем в силу положительной определенности кинетической энергии все осевые моменты тензора инерции будут неотрицательны. Диагональные моменты в этом случае называют главными моментами инерции, а соответствующие оси — главными осями инерции. Для определения главных осей инерции необходимо найти такие направления в пространстве, которые не менялись бы под действием матрицы  $J_{kn}$ , т. е. собственные векторы преобразования, определяемого тензором инерции:

$$J_{kn} x_n = \lambda x_k, \quad (15.13)$$

где  $x_m$  — компоненты собственного вектора в системе, связанной с твердым телом,  $\lambda$  — собственные значения. Существование решений системы (15.13), не равных тождественно нулю, возможно при условии

$$\det \| J_{kn} - \lambda \delta_{kn} \| = 0, \quad (16.13)$$

что определяет три действительных корня  $\lambda_{1,2,3} = J_{1,2,3}$  — три главных момента инерции.

Введенный тензор инерции связан с *моментом инерции тела*, вращающегося вокруг заданной оси. Пусть ось вращения тела задана единичным вектором  $\vec{n}$ , неизменным по

отношению к системе отсчета  $OXYZ$ , так что  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}$ . Положение оси вращения по отношению к системе  $OXY'Z'$ , связанной с твердым телом, определяется направляющими косинусами  $n_k$  между вектором  $\vec{n}$  и ортами подвижной системы  $\{\vec{e}_i\}$ :

$$\vec{n} = n_k \vec{e}_k, \quad (17.13)$$

которые также не изменяются с течением времени. Проекция вектора угловой скорости на орты  $\{\vec{e}_i\}$  имеют вид

$$\omega_i = (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_i) = \Omega(t)(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) = \Omega(t)n_i. \quad (18.13)$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг фиксированной оси, представляется выражением:

$$T = \frac{1}{2} J_{kn} \omega_k \omega_n = \frac{1}{2} J_{kn} n_k n_n \Omega^2(t) = \frac{1}{2} I(\vec{n}) \Omega^2, \quad (19.13)$$

где скалярная величина

$$I(\vec{n}) = J_{kn} n_k n_n, \quad (20.13)$$

не зависящая от времени, называется моментом инерции тела. Она определяется распределением масс твердого тела и ориентацией оси вращения  $\vec{n}$ .

Этой зависимости можно придать наглядный геометрический смысл, вводя *эллипсоид инерции*. Рассмотрим вектор  $\vec{d}$ , направленный вдоль оси вращения:

$$\vec{d} = d\vec{n} = dn_i \vec{e}_i = x_i \vec{e}_i.$$

С помощью этого вектора тензору инерции можно поставить в соответствие скаляр:

$$J_{kn} x_k x_n = d^2 J_{kn} n_k n_n = d^2 I(n).$$

Поверхность, определяемая условием

$$d^2 I(n) = C, \quad (21.13)$$

где  $C$  – константа, представляет собой трехосный эллипсоид, который называется эллипсоидом инерции. Часто константу выбирают так, чтобы численное значение ее равнялось единице. Если оси, связанные с твердым телом, выбраны так, что тензор инерции в этих осях диагоналей, то эллипсоид инерции определяется соотношением

$$J_1 x^2 + J_2 y^2 + J_3 z^2 = C.$$

При выборе численного значения константы, равной единице, полуоси эллипсоида инерции  $a$ ,  $b$ ,  $c$  равны соответственно

$$a = 1/\sqrt{J_1}, \quad b = 1/\sqrt{J_2}, \quad c = 1/\sqrt{J_3}.$$

Компоненты тензора инерции любого тела удовлетворяют неравенству треугольника:

$$J_{11} + J_{22} \geq J_{33}, \quad J_{11} - J_{22} \leq J_{33}?$$

и аналогично, для всех других осей.

Действительно,

$$J_{11} = \sum_{(i)} m_{(i)} (y_{(i)}^2 + z_{(i)}^2),$$

$$J_{22} = \sum_{(i)} m_{(i)} (x_{(i)}^2 + z_{(i)}^2),$$

$$J_{33} = \sum_{(i)} m_{(i)} (x_{(i)}^2 + y_{(i)}^2),$$

откуда

$$J_{11} + J_{22} - J_{33} = 2 \sum_{(i)} m_{(i)} z_{(i)}^2 \geq 0,$$

$$J_{11} - J_{22} - J_{33} = -2 \sum_{(i)} m_{(i)} x_{(i)}^2 \leq 0.$$

Для системы точек, находящейся в плоскости  $z = 0$ , неравенство треугольника переходит в равенство

$$J_{11} + J_{22} = J_{33}.$$

Практически определение главных осей инерции облегчается, если рассматриваемое тело обладает материальной симметрией. *Осью материальной симметрии* называют прямую, относительно которой для каждой точки массы  $m_j$  можно указать точку такой же массы, расположенную симметрично относительно этой прямой, т. е. отрезок, соединяющий эти точки, проходит через прямую, перпендикулярен ей и делится этой прямой пополам.

*Плоскостью материальной симметрии* называют такую плоскость, если для любой точки  $t$ , можно указать точку такой же массы, расположенную симметрично относительно этой плоскости, т. е. отрезок, соединяющий эти две точки, перпендикулярен плоскости и делится ею пополам.

Покажем, что центр масс тела лежит на оси материальной симметрии и эта ось является главной осью инерции, т. е. центробежные моменты инерции относительно этой оси равны нулю. Пусть ось  $OZ$  является осью материальной симметрии системы, состоящей из  $2N$  точек, т. е. для каждой точки  $m_i$ , где  $1 \leq i \leq N$ , задаваемой радиусом-вектором  $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ , существует точка массы  $m_{i+N} = m_i$ , положение которой определяется вектором  $\vec{r}_{i+N} = \{-x_i, -y_i, z_i\}$ . Положение центра масс системы определяется равенством

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2N} m_i \vec{r}_i,$$

где  $M = \sum_{i=1}^{2N} m_i$  - масса системы.

Проводя суммирование получим

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{i+N} \right) = \left\{ 0, 0, \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i \right\}$$

т. е. центр масс находится на оси симметрии.

Центробежные моменты относительно оси  $OZ$  равны; нулю:

$$J_{13} = -\sum_{i=1}^{2N} m_i x_i z_i = -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i + \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = 0$$

Аналогично  $J_{23} = 0$ .

Центр масс системы точек, обладающей плоскостью симметрии, лежит в этой плоскости, а любая ось, перпендикулярная ей, является главной осью симметрии. Пусть плоскость  $OXY$  является плоскостью симметрии рассматриваемой системы  $2N$  точек, т. е. для каждой точки  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , определяемой радиусом-вектором  $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ , существует точка, масса которой  $m_{i+N} = m_i$ , а радиус-вектор  $\vec{r}_{i+N} = \{x_i, y_i, -z_i\}$ . Очевидно, что  $z = 0$ ,  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ . Поскольку положение начала координат ничем не выделено в плоскости  $OXY$ , то результат справедлив для любой оси, перпендикулярной плоскости, а не только для  $OZ$ .

Для тел, обладающих высокой симметрией, скажем, однородных тел вращения, указанные свойства позволяют сразу же определить главные оси инерции. Так, для тел вращения ось вращения и любые две перпендикулярные ей оси, перпендикулярные между собой, диагонализуют тензор инерции.

Рассмотрим теперь преобразования тензора инерции при сдвиге осей. Пусть в некоторой системе  $OXYZ$  тензор инерции определяется выражением (5.13). Координаты точек в новой системе  $O'X'Y'Z'$ , начало которой сдвинуто относительно исходной системы, а оси координат параллельны исходным осям и связаны со старыми соотношением

$$\vec{r}_{(i)} = \vec{r}'_{(i)} + \vec{c},$$

где вектор  $\vec{c}$ , определяет сдвиг начала новой системы. Подставляя это выражение в (5.13), получим связь между тензором инерции в исходной системе и в новой  $J'_{lm}$ :

$$J_{lm} = J'_{lm} + \sum_{(i)} m_{(i)} (c^2 \delta_{lm} - c_l c_m) + \sum_{(i)} m_{(i)} (2c_k x_k^{(i)} \delta_{lm} - x_l^{(i)} c_m - x_m^{(i)} c_l).$$

Если начало новой системы совместить с центром масс, то

$$\sum_{(i)} m_{(i)} x_l^{(i)} = 0,$$

и в этом случае

$$J_{lm} = J_{lm}^0 + M(c^2 \delta_{lm} - c_l c_m), \quad (22.13)$$

где  $J_{lm}^0$  — тензор инерции в системе центра масс, а  $M = \sum_i m_i$  масса тела.

Параллельный перенос осей преобразует момент инерции системы относительно оси, определяемой вектором  $\vec{n}$ :

$$J_{lm} n_l n_m = I = I^0 + Md^2.$$

Здесь  $d = c \sin \alpha$  — расстояние от точки  $O'$  системы центра масс до оси вращения, а  $I^0$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Рассмотренное преобразование составляет содержание теоремы Штейнера.

### 13.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой существенно упрощаются, если динамические переменные — векторы кинетического момента и угловой скорости — задавать проекциями на оси системы  $\vec{e}_s$ , жестко связанные с движущимся телом. В этом случае компоненты тензора инерции явно не зависят от времени. Выберем систему координат, связанную с твердым телом, так, чтобы учесть симметрии в распределении масс и диагонализировать тензор инерции. Пусть  $J_1 > J_2 > J_3$  — главные моменты тензора. Вектор угловой скорости мы будем задавать также проекциями на орты  $\vec{e}_s$ :

$$\vec{\Omega} = \Omega_s \vec{e}_s.$$

Кинетический момент вращающегося тела в этом случае

$$\vec{M} = M_s \vec{e}_s = J_{sk} \Omega_k \vec{e}_s = J_1 \Omega_1 \vec{e}_1 + J_2 \Omega_2 \vec{e}_2 + J_3 \Omega_3 \vec{e}_3,$$

т. е. определяется компонентами

$$\vec{M} = \{J_1 \Omega_1, J_2 \Omega_2, J_3 \Omega_3\}. \quad (23.13)$$

Векторы  $\vec{e}_s$  при движении твердого тела могут поворачиваться относительно инерциальной системы, определяемой ортами  $\vec{n}_k$ , так что  $\vec{e}_s = a_{sk} \vec{n}_k$ , причем коэффициенты матрицы поворотов зависят от времени:

$$a_{sk} = a_{sk}(t).$$

Используем теорему об изменении кинетического момента

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = \vec{L}.$$

Выполняя дифференцирование с учетом вращения ортов

$$\frac{dM_s}{dt} \vec{e}_s + M_s \frac{d\vec{e}_s}{dt} = \vec{L}, \quad \frac{d\vec{e}_s}{dt} = \dot{a}_{sk} \vec{n}_k = [\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_s],$$

получим выражение для изменения кинетического момента

$$\dot{M}_s \vec{e}_s + [\vec{\Omega} \cdot M_s \vec{e}_s] = \vec{L}. \quad (24.13)$$

Подставляя в это выражение значения вектора кинетического момента из (23.13), найдем проекции уравнения (24.13) на орты движущейся системы:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\Omega}_1 &= (J_2 - J_3) \Omega_2 \Omega_3 + L_1, \\ J_2 \dot{\Omega}_2 &= -(J_1 - J_3) \Omega_1 \Omega_3 + L_2, \\ J_3 \dot{\Omega}_3 &= (J_1 - J_2) \Omega_1 \Omega_2 + L_3. \end{aligned} \tag{25.13}$$

Полученная система уравнений называется системой динамических уравнений Эйлера. Вместе с кинематическими уравнениями, выражающими угловую скорость через обобщенные координаты и скорости, полученная система шести уравнений первого порядка описывает вращательное движение твердого тела. В качестве таких уравнений можно взять кинематические уравнения Эйлера (18.12):

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Интегрирование системы динамических уравнений Эйлера (25.13) в общем случае весьма сложно. Общее решение в квадратурах для этих уравнений может быть получено в некоторых частных случаях, к которым относятся случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Случай свободного движения твердого тела, когда момент внешних сил, действующих на него, равен нулю, называется случаем Эйлера. В частности, если эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения  $J_1 = J_2$  движение тела называют регулярной прецессией. Интегрирование уравнений в этом случае существенно упрощается. Напомним, что углы Эйлера имеют следующие названия:

- $\varphi$  — угол прецессии,
- $\theta$  — угол нутации,
- $\psi$  — угол собственного вращения,

так что названия движения вращающегося тела — прецессия или нутация — связаны с изменением соответствующих углов Эйлера.

В случае свободного движения, когда момент внешних сил равен нулю, система динамических уравнений Эйлера явно не зависит от углов и может быть проинтегрирована независимо от системы кинематических уравнений (18.12). В рассматриваемом случае симметричного тела решение последнего уравнения системы (25.13) тривиально:  $\Omega_3 = \omega_3$ , а оставшиеся два уравнения этой системы

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\Omega}_1 &= (J_1 - J_3) \omega_3 \Omega_2, \\ J_2 \dot{\Omega}_2 &= -(J_1 - J_3) \omega_3 \Omega_1, \end{aligned} \tag{26.13}$$

являются линейными однородными уравнениями с постоянными коэффициентами, решение которых находится стандартными методами:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \omega_0 \sin[(1 - J_3/J_1)\omega_3 t + \psi_0], \\ \Omega_2 &= \omega_0 \cos[(1 - J_3/J_1)\omega_3 t + \psi_0].\end{aligned}$$

Это означает, что вектор угловой скорости  $\vec{\Omega}$  при движении твердого тела вращается (прецессирует) вокруг оси  $\vec{e}_3$  со скоростью  $\Omega_{np}$

$$\Omega_{np} = (1 - J_3/J_1)\omega_3. \quad (27.13)$$

Полученные решения динамических уравнений позволяют проинтегрировать кинематические уравнения (18.12):

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi &= \omega_0 \sin(\Omega_{np} t + \psi_0), \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi &= \omega_0 \cos(\Omega_{np} t + \psi_0), \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} &= \omega_0.\end{aligned} \quad (28.13)$$

Для упрощения вычислений выберем лабораторную систему так, чтобы вектор кинетического момента  $\vec{M}$ , который является интегралом задачи, был направлен вдоль оси  $\vec{n}_3$ :

$$\vec{M} = M_0 \vec{n}_3 = J_1(\Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2) + J_3 \omega_3 \vec{e}_3.$$

Как следует из решения системы (25.13), проекция вектора  $\vec{M}$  на орт  $\vec{e}_3$  также сохраняется:

$$M_0(\vec{e}_3 \cdot \vec{n}_3) = M_0 \cos \vartheta = J_3 \omega_3.$$

В этом выражении  $M_0$  – величина вектора кинетического момента:

$$M_0 = \sqrt{J_1^2 \omega_0^2 + J_3^2 \omega_3^2},$$

что позволяет определить сохраняющийся угол  $\vartheta = \vartheta_0$ :

$$\cos \vartheta_0 = \frac{J_3 \omega_3}{\sqrt{J_1^2 \omega_0^2 + J_3^2 \omega_3^2}}.$$

С учетом полученного решения система кинематических уравнений (28.13) может быть приведена к виду

$$\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 = \omega_0, \quad \dot{\varphi} \cos \vartheta_0 + \dot{\psi} = \omega_3. \quad (29.13)$$

Решения этой системы определяют движение твердого тела

$$\begin{aligned}\psi &= \Omega_{np} t + \psi_0, \\ \varphi &= \omega_0 \sqrt{1 + \frac{J_3^2 \omega_3^2}{J_1^2 \omega_0^2}} t + \varphi_0.\end{aligned} \quad (30.13)$$

В зависимости от соотношения между  $J_1$  и  $J_3$  прецессия может быть прямой, когда  $J_1 > J_3$ , или обратной, когда  $J_1 < J_3$ .

Полученные результаты могут быть применены к описанию движения планет, которые представляют собой слегка сплюснутые тела вращения. Если распределение масс обладает симметрией, то можно полагать  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . Например, для Земли  $J_1 < J_3$ . Если период суточного вращения известен и угол между осью вращения и осью симметрии мал, то период обращения полюса — период Эйлера — определяется полученным соотношением (27.13). В частности, для Земли из анализа ее формы можно предположить  $\frac{J_3 - J_1}{J_1} \approx 0,0033$ , так что  $\Omega_{np} = \omega_3/300$ . Наблюдаемое движение полюса несколько отличается от расчетного, что может быть обусловлено отклонением в распределении масс от принятой модели или тем, что модель абсолютно твердого тела в этом случае оказывается слишком грубой.

### 13.4. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим подробнее общий случай свободного движения, когда решение может быть получено в квадратурах, — случай Эйлера. В этом случае задача интегрирования может быть разделена на две части. Во-первых, может быть проинтегрирована в квадратурах система динамических уравнений Эйлера и получены выражения для компонент вектора угловой скорости независимо от выбора координат, определяющих ориентацию твердого тела, и, во-вторых, до конца интегрируется система кинематических уравнений, например, при выборе в качестве параметров углов Эйлера. Первая часть задачи решается благодаря выбору подвижной системы координат для записи динамических уравнений, поскольку в этом случае коэффициенты  $J_s$  не зависят от времени.

Система однородных уравнений Эйлера имеет два очевидных интеграла — энергию и квадрат кинетического момента:

$$\begin{cases} 2E = J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 \\ M^2 = J_1^2\Omega_1^2 + J_2^2\Omega_2^2 + J_3^2\Omega_3^2. \end{cases} \quad (31.13)$$

Используя эти интегралы, легко исключить любые две функции, например  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , из уравнений движения. Обычно исключают  $\Omega_1$ ,  $\Omega_3$  и оставляют уравнение для  $\Omega_2$ :

$$J_1 J_3 J_2^2 \dot{\Omega}_2^2 = \left[ (M^2 - 2E J_3) - J_2 (J_2 - J_3) \Omega_2^2 \right] \cdot \left[ (2E J_1 - M^2) - J_2 (J_1 - J_2) \Omega_2^2 \right].$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Прежде чем переходить к вычислению квадратуры, проведем качественное исследование и рассмотрим возможные области изменения параметров и переменных. Пусть движение происходит с некоторым заданным значением величины кинетического момента  $M = const$ .



Движение возможно лишь в области изменения энергии и переменной  $\Omega_2$ , удовлетворяющих условию  $\dot{\Omega}_2^2 \geq 0$ . Структура уравнения совпадает со структурой уравнения в задаче об одномерном движении в случае существования интеграла энергии. В этом случае полезным оказывается введение эффективной потенциальной энергии, зависящей от дополнительных параметров, определяемых начальными условиями (например, кинетического момента в задаче о движении в центральном поле). В рассмотренных ранее задачах, однако, энергия входила линейно, а в нашем случае выражение

$$\dot{\Omega}_2^2 = \dot{\Omega}_2^2(E, M, \Omega)$$

содержит не только линейные, но и квадратичные по энергии члены. Такая структура характерна для релятивистских одномерных задач, где интегралом является квадрат четырехмерного импульса. Полезно поэтому несколько обобщить понятие эффективной энергии, определив ее условием  $\dot{\Omega}_2 = 0$ . В нашем случае это приведет к существованию двух ветвей эффективной энергии  $E_{eff}$ , определяемых уравнениями

$$E_+ = \frac{M^2}{2J_3} - \frac{J_2\Omega_2^2}{2} \frac{J_2 - J_3}{J_3}, \quad E_- = \frac{M^2}{2J_1} + \frac{J_2\Omega_2^2}{2} \frac{J_1 - J_2}{J_1}. \quad (32.13)$$

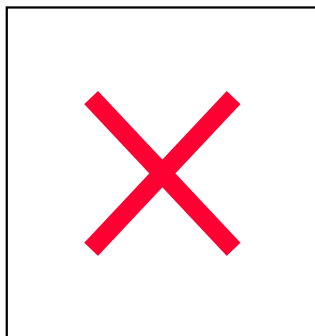
Поскольку мы полагаем  $J_1 > J_3$ , введем следующие обозначения:

$$E_{\max} = \frac{M^2}{2J_3}, \quad E_{\min} = \frac{M^2}{2J_1}.$$

Значения параметров  $E_{\min}$  и  $E_{\max}$  определяют область изменения энергии в рассматриваемой задаче при фиксированном значении кинетического момента:

$$E_{\min} \leq E \leq E_{\max}.$$

Зависимость  $E_{eff}(\Omega)$  изображена на рис. 1.13. Движение с заданным значением  $E$  происходит в области



$$E_-(\Omega) \leq E \leq E_+(\Omega),$$

что определяет область изменения переменной  $\Omega$ :

$$\Omega_{10} \leq \Omega \leq \Omega_{20}$$

Границы области, соответствующие значениям  $\dot{\Omega}_{10} = 0$ ,  $\dot{\Omega}_{20} = 0$ , определяют точки остановки. В отличие от обычных графиков

разность  $E - E_{eff}(\Omega)$  теперь не является кинетической энергией точки, так что

непосредственное определение скорости по виду графика несколько сложнее. В рассматриваемом случае  $\dot{\Omega} \sim \sqrt{(E - E_-(\Omega))(E_+(\Omega) - E)}$ ,

т. е. определяется средним геометрическим. Максимальное значение  $\Omega = \Omega_0$  достигается в точках, удовлетворяющих условию  $E_+(\Omega_0) = E_-(\Omega_0) = E_0$ .

Подставляя сюда значения из уравнений (32.13), получим

$$\Omega_0 = \frac{M}{J_2}, \quad E_0 = \frac{M^2}{J_2}.$$

Таким образом, при энергии  $E = E_0$  тело вращается вокруг оси, совпадающей с ортом  $\vec{e}_2$ .

При  $\Omega_2 = 0$  ось вращения лежит в плоскости  $\vec{e}_1, \vec{e}_3$  и может занимать любое положение по отношению к ортам. В частности, если  $\Omega_1 = 0$ , то  $M = J_3\Omega_3$ ,  $E = E_{\max}$ . Таким образом тело, вращающееся вокруг оси с минимальным моментом инерции, обладает максимальной энергией, а точка на графике  $\Omega_2 = 0$ ,  $E = E_{\max}$  изображает это состояние.

Соответственно при  $\Omega_2 = 0$  и  $E = E_{\min}$ ,  $M = J_1\Omega_1$  вращение происходит вокруг оси  $\vec{e}_1$ .

Вблизи границы области движение является равноускоренным, так что граница достигается за конечное время. Действительно, пусть изображающая точка движется вблизи  $\Omega_{10}$ . Разложим  $E_-(\Omega)$  в окрестности точки  $\Omega_{10}$ :

$$E_-(\Omega) = E_-(\Omega_{10}) + \frac{\partial E}{\partial \Omega} \Delta\Omega_2 = E_-(\Omega_{10}) - k\Delta\Omega_2,$$

где

$$-k = \frac{\partial E}{\partial \Omega} < 0.$$

В этом случае справедливо приближение

$$\dot{\Omega}_2 = \Delta\dot{\Omega}_2 \sim \sqrt{k\Delta\Omega_2(E_+(\Omega_{10}) - E_-(\Omega_{10}))},$$

т. е.

$$\Delta\dot{\Omega}_2 \sim \sqrt{k\Delta\Omega_2},$$

так что интеграл  $\Delta t \sim \int_0^{\Delta\Omega_2} \frac{d\Omega}{\sqrt{\Omega}}$  сходится. Этот результат означает, что все точки границы

$$\begin{cases} E_+ - E = 0, \\ E - E_- \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} E_+ - E \neq 0, \\ E - E_- = 0 \end{cases}$$

являются точками поворота и достигаются за конечное время. Таким образом, движение

изображающей точки — колебания. Угловая скорость  $\Omega_2 = \Omega_2(t)$  при заданном значении момента  $M$  совершает колебания, амплитуда которых зависит лишь от значения энергии и определяется условием

$$E = E_{\text{eff}}(\Omega_{\text{amp}}).$$

Кинетическая энергия движения, обусловленного изменением параметра  $\Omega_2$  имеет в рассмотренных точках простой корень. Точки  $\Omega_2 = 0$ ,  $E = E_{\text{min}}$  и  $E = E_{\text{max}}$  являются точками устойчивого равновесия, а движение в окрестности этих точек — гармонические колебания.

Несложно вычислить период этих колебаний и определить закон движения. Пусть, например,  $E = E_{\text{min}} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll E_{\text{min}}$ . Это соответствует вращению вокруг оси  $\bar{e}_1$ . Полагая, что в этом случае

$$E_+(\Omega) - E \approx E_{\text{max}} - E_{\text{min}} = \frac{M^2}{2} \left( \frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right),$$

получим приближенное уравнение для  $\Omega_2$ :

$$\frac{J_2 \dot{\Omega}_2^2}{2} = \frac{M^2}{J_2} \frac{J_1 - J_3}{J_1 J_3} \left( \varepsilon - \frac{J_1 - J_2}{J_1} \frac{J_2 \Omega_2^2}{2} \right).$$

Решение этого уравнения дает гармонические колебания для  $\Omega_2(t)$ :

$$\Omega_2(t) = \Omega_{20} \sin(\omega_1 t + c_1),$$

которые происходят с амплитудой  $\Omega_{20}$ , определяемой отклонением энергии  $\varepsilon = E - E_{\text{min}}$  от экстремума, а частота этих колебаний определяется лишь компонентами тензора инерции и величиной кинетического момента

$$\omega_1 = \frac{M}{J_1} \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2 J_3}}.$$

Учитывая связь между компонентами угловой скорости (31.13)

$$\begin{cases} J_1(J_1 - J_3)\Omega_1^2 = M^2 - 2EJ_3 - J_2(J_2 - J_3)\Omega_2^2 \\ J_3(J_1 - J_3)\Omega_3^2 = 2EJ_1 - M^2 - J_2(J_1 - J_2)\Omega_2^2, \end{cases}$$

при  $\varepsilon \ll E_{\text{min}}$  получим выражения для компонент  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$

$$\Omega_1(t) = \pm \sqrt{\frac{M^2}{J_1^2} - \frac{J_2(J_2 - J_3)}{J_1(J_1 - J_3)}} \Omega_2^2(t),$$

$$\Omega_3(t) = \pm \sqrt{\frac{J_2(J_1 - J_2)}{J_3(J_1 - J_3)}} \Omega_{20} \cos(\omega_1 t + c_1).$$

Таким образом, вектор угловой скорости описывает эллипсы вокруг оси  $\vec{e}_1$ , причем полуоси этих эллипсов определяются малой амплитудой колебаний  $\Omega_{20}$ . Поскольку величина вектора скорости практически равна  $\Omega_1 \approx M/J_1$ , то период вращения вектора угловой скорости вокруг оси

$$\omega_1 \approx \Omega_1 \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2 J_3}}.$$

Аналогичные выражения справедливы и для вращения вокруг оси  $\vec{e}_3$ . Выражения для них могут быть получены простой заменой индексов:

$$\omega_3 = \Omega_3 \sqrt{\frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_3)}{J_1 J_2}}.$$

Несколько сложнее исследовать движение в окрестности точки  $\Omega_0$ . При  $E = E_0$  точка  $\Omega = \Omega_0$  является корнем кратности 2 для выражения  $(E - E_{eff})^2$ . В этом случае, как следует из общей теории качественного исследования движения, особая точка не может быть достигнута за конечное время.

Подставляя значение  $E_0 = M^2/2J_2$  в уравнение для угловой скорости  $\Omega_2$ , получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\Omega}_2 = \pm \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)}{J_1 J_3}} (\Omega_0^2 - \Omega_2^2) = \pm k_2 (\Omega_0^2 - \Omega_2^2)$$

где

$$k_2 = \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)}{J_1 J_3}}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$k_2 t = \pm \frac{1}{2\Omega_0} \ln \left| \frac{\Omega_2 + \Omega_0}{\Omega_2 - \Omega_0} \right| + const.$$

Выбирая константу интегрирования так, чтобы

$$\Omega_2(0) = 0, \quad \dot{\Omega}_2(0) > 0,$$

получим явное выражение для  $\Omega_2$  :

$$\Omega_2(t) = \Omega_0 \operatorname{th}(k_2 \Omega_0 t).$$

Очевидно, что  $\Omega_2 \rightarrow \Omega_0$  при  $\Omega_0 t \rightarrow \infty$ , но точка остается недостижимой. Закон движения в этом случае совпадает с законом движения математического маятника при  $E = U_{\max} = E_0$ . Более подробно исследовать характер движения при энергии  $E = E_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll E_0$ , можно, проведя замену переменных, что сводит эту задачу к задаче о движении математического маятника. Для упрощения обозначений введем вместо констант  $E$  и  $M$ , определяющих энергию и момент твердого тела, переменные размерности угловой скорости  $\Omega_{10}$  и  $\Omega_{30}$ , определяемые следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} J_2(J_2 - J_3)\Omega_{10}^2 &= M^2 - 2EJ_3, \\ J_2(J_1 - J_2)\Omega_{30}^2 &= 2EJ_1 - M^2, \end{aligned} \quad (35.13)$$

с помощью которых уравнения для угловой скорости  $\Omega_2$  можно записать в виде

$$\dot{\Omega}_2^2 = k_2^2 (\Omega_{10}^2 - \Omega_2^2) (\Omega_{30}^2 - \Omega_2^2).$$

В области изменения параметра  $E$  при заданном  $M$  введенные величины удовлетворяют условиям

$$0 \leq \Omega_{10}^2 \leq \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{J_1 - J_3}{J_2 - J_3} \cdot \Omega_0^2 \quad (\Omega_{10} = 0 \text{ при } E = E_{\max})$$

$$0 \leq \Omega_{30}^2 \leq \frac{J_2}{J_3} \cdot \frac{J_1 - J_3}{J_1 - J_2} \cdot \Omega_0^2 \quad (\Omega_{30} = 0 \text{ при } E = E_{\min})$$

Вращению вокруг оси  $\vec{e}_1$  соответствует случай  $\Omega_{30} = 0$  и  $\Omega_{10}^2 = \Omega_{10\max}^2$ , а движение при  $E = E_0$  происходит так, что  $\Omega_2 = \Omega_0$ :

$$\Omega_{10}^2 = \Omega_{30}^2 = \Omega_0^2$$

Рассмотрим подробнее для определенности случай, когда

$$\Omega_{10}^2 \leq \Omega_0^2 \leq \Omega_{30}^2,$$

что соответствует области возможных изменений вектора  $\vec{\Omega}$  от вращения вокруг оси  $\vec{e}_3$  до вращения вокруг  $\vec{e}_2$ .

Поскольку в этом случае область изменения  $\Omega_2$  ограничена условием  $\Omega_{10}^2 \leq \Omega_2^2 \leq \Omega_{30}^2$ , можно ввести переменную  $\alpha$  с помощью следующего уравнения:

$$\Omega_2 = \Omega_{30} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Изменению этой переменной в области  $-\pi < \alpha < \pi$  соответствует изменение  $\Omega_2$  во всей возможной области. Для переменной  $\alpha$  справедливо уравнение математического маятника

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2} k_2 \frac{\Omega_{10}^2}{\Omega_{30}^2} (1 + q + \cos \alpha)^{1/2}$$

где

$$q = 2 \frac{\Omega_{30}^2 - \Omega_{10}^2}{\Omega_{30}^2}.$$

Этот случай соответствует вращению математического маятника, определяемого углом  $\alpha$ . При  $q \ll 1$  период вращения легко оценить, используя метод сшивания решений. Введем характерную частоту

$$\omega_2 = k_2 \Omega_{30} \approx k_2 \Omega_0.$$

Закон движения для переменной  $\alpha$  записывается в виде квадратуры

$$\omega_2 t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + q + \cos \alpha}}.$$

Этот интеграл является эллиптическим интегралом первого рода, так что закон движения можно записать в виде

$$\omega_2 t = \pm k F\left(\frac{\alpha}{2}, k\right), \text{ где } k = 1/\sqrt{1 + q/2}.$$

С помощью полученного выражения можно определить период колебаний угловой скорости для интересующего нас случая  $q \ll 1$ . Используя разложение эллиптического интеграла при  $k \approx 1$ , получим оценку

$$T = \frac{2}{k_2 \Omega_0} \ln\left(\frac{32}{q}\right).$$

Этот же результат можно получить непосредственно из квадратуры, используя метод сшивания решений, изложенный в п. 14.2.

Вдали от точек остановки закон движения имеет вид

$$\Omega_2(t) \approx \Omega_{30} \operatorname{th}(\omega_2 t)$$

Соответственно для компонент  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_3(t)$  зависимость от времени дается выражениями

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \sqrt{\frac{J_2(J_2 - J_3)}{J_1(J_1 - J_3)}} \cdot \sqrt{\Omega_{10}^2 - \Omega_2^2(t)}, \\ \Omega_3(t) &= \sqrt{\frac{J_2(J_1 - J_2)}{J_3(J_1 - J_3)}} \cdot \sqrt{\Omega_{30}^2 - \Omega_2^2(t)} \end{aligned} \quad (37.13)$$

Графики зависимости компонент угловой скорости от времени приведены на рис. 2.13.



Рис 2.13

Для определения зависимости углов Эйлера от времени выберем лабораторную систему так, чтобы сохраняющий вектор кинетического момента был направлен вдоль оси  $OZ$ :  $\vec{M} = M_0 \vec{n}_3$ . Учитывая явные выражения для коэффициентов матрицы  $a_{k3}$  -

$$a_{13} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{n}_3) = \sin \psi \sin \vartheta,$$

$$a_{23} = (\vec{e}_2 \cdot \vec{n}_3) = \cos \psi \sin \vartheta,$$

$$a_{33} = (\vec{e}_3 \cdot \vec{n}_3) = \cos \vartheta,$$

найдем проекции вектора  $\vec{M}$  на орты  $\vec{e}_k$ , что сразу же дает явную зависимость углов нутации и собственного вращения  $\vartheta, \psi$  от времени:

$$\cos \vartheta = \frac{J_3}{M_0} \Omega_1(t), \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{\Omega_3(t)}{\Omega_2(t)}.$$

Угол прецессии определяется из кинематических формул Эйлера квадратурой

$$\varphi(t) = \int \frac{\Omega_1 \sin \psi(t) + \Omega_2 \cos \psi(t)}{\sin \vartheta(t)} dt + \varphi_0. \quad (38.13)$$

### 13.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПУАНСО

Представление о движении вектора угловой скорости твердого тела в случае Эйлера может быть сделано наглядным, если учесть, что в этом случае вектор кинетического момента  $\vec{M}$  сохраняется. Сохранение направления вектора в пространстве фиксирует плоскость движения. Выберем систему координат некоторой инерциальной системы отсчета так, чтобы орт  $\vec{n}_3$  был направлен вдоль вектора  $\vec{M}$

$$\vec{M} = M\vec{n}_3.$$

Проекция вектора  $\vec{M}$  на орты  $\vec{e}_s$  системы, связанной с твердым телом, изменяются  $M_s = (\vec{M} \cdot \vec{e}_s) = J_{sm}\Omega_m$ . Учитывая, что компоненты этого вектора выражаются через компоненты вектора угловой скорости  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{\Omega} = \Omega_m \vec{e}_m,$$

вычислим скалярное произведение

$$(\vec{M} \cdot \vec{\Omega}) = J_{sm}\Omega_s\Omega_m = 2E.$$

Поскольку энергия в рассматриваемом случае является интегралом, то полученное соотношение означает, что сохраняется проекция вектора угловой скорости на ось  $OZ$

$$\Omega_z = 2E/M.$$

Таким образом, концы вектора угловой скорости при движении будут лежать в некоторой плоскости  $P_\Omega$ , перпендикулярной вектору кинетического момента, а в нашем случае — оси  $OZ$ . С другой стороны, сохранение кинетической энергии приводит к тому, что величина вектора  $\vec{\Omega}$  меняется, так как геометрическое место концов вектора определяет эллипсоид инерции

$$J_{sm}\Omega_s\Omega_m = 2E.$$

Таким образом, движение вектора угловой скорости при вращении твердого тела происходит так, как будто эллипсоид инерции «катится» без проскальзывания по плоскости  $P_\Omega$ .

Совместное выполнение условий движения эллипсоида инерции по плоскости

$$\begin{cases} M^2 = J_{sm}J_{sk}\Omega_m\Omega_k \\ 2E = J_{sm}\Omega_s\Omega_m \end{cases}$$

определяет кривые — точки касания плоскости  $P_\Omega$  и эллипсоида инерции. В координатах, связанных с твердым телом, где тензор инерции диагонален (орты  $\vec{e}_s$ ), эти уравнения определяют поверхности сферы  $M = M_0$  и эллипсоида инерции  $E = E_0$ :

$$\begin{cases} M_0^2 = J_1^2\Omega_1^2 + J_2^2\Omega_2^2 + J_3^2\Omega_3^2 \\ 2E = J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 \end{cases}$$

Пересечение этих поверхностей определяет геометрическое место точек полюсов вектора угловой скорости — полюдии. Вводя константы  $J_0, \Omega_0$  вместо  $E$  и  $M$  с помощью соотношений

$$2E = J_0\Omega_0^2, \quad M^2 = J_0^2\Omega_0^2,$$

нетрудно показать, что на плоскостях  $\vec{e}_1\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_2\vec{e}_3$  проекции линий пересечения образуют семейство эллипсов:



$$\frac{J_1(J_1 - J_3) \Omega_1^2}{J_0(J_0 - J_3) \Omega_0^2} + \frac{J_2(J_2 - J_3) \Omega_2^2}{J_0(J_0 - J_3) \Omega_0^2} = 1,$$

а проекция на плоскость  $\vec{e}_1\vec{e}_3$  определяет семейство гипербол:

$$\frac{J_1(J_1 - J_2) \Omega_1^2}{J_0(J_0 - J_2) \Omega_0^2} - \frac{J_3(J_2 - J_3) \Omega_3^2}{J_0(J_0 - J_2) \Omega_0^2} = 1.$$

### 13.6. ТВЕРДОЕ ТЕЛО ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ. СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА

В случае твердого тела, движущегося в заданном внешнем поле, переменные разделяются, и решение может быть получено в виде квадратур только в некоторых специальных случаях. В случае Лагранжа движение происходит в однородном поле тяжести и предполагается, что вращающееся тело обладает симметрией, так что  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . Предположим, что в этом случае орты  $\vec{e}_i$ , выбраны так, чтобы они совпадали с главными осями тензора инерции, а лабораторная система ориентирована так, что сила тяжести направлена вдоль оси  $\vec{n}_3$ . Мы будем предполагать, что твердое тело имеет неподвижную точку, которая находится на расстоянии  $l$  от центра масс, и выберем начало лабораторной системы  $O$ , совпадающим с неподвижной точкой. Положение твердого тела относительно инерциальной лабораторной системы  $\vec{n}_k$  мы будем задавать углами Эйлера, как показано на рис 1 13

Для составления уравнений движения твердого тела в этих переменных может быть использован лагранжев подход. Кинетическую энергию вращающегося тела удобно вычислять, используя теорему Кенига. В этом случае функция Лагранжа легко вычисляется:

$$L = \frac{J_1 + ml^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - mgl \cos \vartheta.$$

Поскольку функция Лагранжа не зависит явно от углов прецессии  $\varphi$  и собственного вращения  $\psi$ , в системе сохраняются соответствующие обобщенные импульсы:

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = [(J_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta + J_3 \cos^2 \vartheta] \dot{\varphi} + J_3 \dot{\psi} \cos \vartheta = P_{\varphi_0}$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = P_{\psi_0}.$$

Кроме того, функция Лагранжа не зависит явно от времени, что приводит к сохранению обобщенной энергии, которая в данном случае совпадает с полной:

$$E = \frac{J_1 + ml^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 + mgl \cos \vartheta \quad (41.13)$$

Поскольку число первых интегралов задачи равно числу независимых координат, возможно провести разделение переменных и получить решение в виде квадратур. Подставляя выражения для обобщенных скоростей в интеграл энергии (41.13), мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$E = \frac{J_1 + ml^2}{2} \dot{\vartheta}^2 + U_{eff}(\vartheta), \quad (42.13)$$

где  $U_{eff}$  — эффективная энергия, определяемая выражением

$$U_{eff}(\vartheta) = \frac{P_{\psi}^2}{2J_3} + \frac{(P_{\phi} - P_{\psi} \cos \vartheta)^2}{2(J_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta.$$

Решение уравнения (42.13) в виде квадратуры получается элементарно:

$$t = \pm \sqrt{\frac{J_1 + ml^2}{2}} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{E - U_{eff}(\vartheta)}}.$$

Область возможных значений угла нутации  $\vartheta$  определяется условием  $E - U_{eff}(\vartheta) \geq 0$ . При  $P_{\phi} \neq P_{\psi}$  функция  $U_{eff}(\vartheta)$  обращается в бесконечность при  $\vartheta = 0, \pi$ , а в интервале между этими значениями имеет минимум. Таким образом, при любых  $E$  движение происходит в области  $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ , где  $\vartheta_{1,2}$  определяется условием  $U_{eff}(\vartheta_{1,2}) = E$ .

В общем случае решение уравнения (42.13) будет весьма громоздким, однако в некоторых частных случаях решение может быть получено в элементарных функциях. В частности, тело может вращаться вокруг вертикальной оси. Найдем условия, при которых это вращение существует и устойчиво.

Пусть  $\vartheta(t) = 0$ . При этом орты  $\vec{e}_3$  и  $\vec{n}_3$  совпадают, так что  $P_{\phi} = P_{\psi}$ . Поскольку  $\dot{\vartheta}(t) = 0$ ,

$$U_{eff}(\vartheta) = \frac{P_{\psi}^2}{2J_3} + \frac{P_{\psi}^2}{8(J_1 + ml^2)} + mgl = E. \quad (43.13)$$

В окрестности точки покоя  $\vartheta = 0$  эффективная потенциальная энергия может быть разложена в ряд по  $\vartheta$ :

$$U_{eff}(\vartheta) \approx E + \left( \frac{P_{\psi}^2}{J_1 + ml^2} - 4mgl \right) \frac{\vartheta^2}{8}.$$

Функция имеет минимум при  $\vartheta = 0$  в случае

$$P_{\psi}^2 > 4mgl(J_1 + ml^2), \quad (44.13)$$

поэтому при выполнении условия (44.13) движение тела вокруг вертикальной оси устойчиво.

Другой случай — псевдорегулярная прецессия при  $\vartheta \neq 0$  осуществляется также при достаточно большой скорости вращения тела вокруг оси симметрии. Пусть параметры задачи выбраны так, что  $\dot{\phi}_0 = \dot{\vartheta}_0 = 0$ , а  $\dot{\psi}_0 \neq 0$ . В этом случае интегралы движения выражаются через заданные значения углов и угловых скоростей:

$$P_{\phi} = J_3 \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0, \quad P_{\psi} = J_3 \dot{\psi}_0.$$

Эффективная энергия для заданных условий имеет вид

$$U_{eff} = \frac{J_3 \dot{\psi}_0^2}{2} + \frac{J_3^2}{2(J_1 + ml^2)} \frac{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta \quad (45.13)$$

Значение полной энергии, при котором  $\dot{\vartheta} = 0$ ,

$$E = U_{eff}(\vartheta_0) = \frac{J_3 \dot{\psi}_0^2}{2} + mgl \cos \vartheta_0.$$

Для исследования движения вблизи точки  $\vartheta = \vartheta_0$  разложим  $U_{eff}$  по степеням  $\varepsilon = \vartheta - \vartheta_0$ , ограничиваясь степенями  $\varepsilon$  не выше второй. Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{J_1 + ml^2}{2} \dot{\varepsilon}^2 = \varepsilon mgl \sin \vartheta_0 - \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{2(J_1 + ml^2)} \varepsilon^2$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим линейное уравнение для отклонения от точки покоя:

$$(J_1 + ml^2) \ddot{\varepsilon} + \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{J_1 + ml^2} \varepsilon = mgl \sin \vartheta_0.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях  $\varepsilon(0) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}(0) \neq 0$  имеет вид

$$\varepsilon(t) = 2mgl \sin \vartheta_0 \frac{(J_1 + ml^2)}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \sin^2 \left( \frac{\Omega_n t}{2} \right), \text{ где } \Omega_n^2 = \frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{J_1 + ml^2}.$$

Учитывая полученное выражение, нетрудно получить зависимость углов Эйлера от времени, используя интегралы задачи

$$\varphi(t) = \frac{mgl}{J_3 \dot{\psi}_0} t - mgl \frac{J_1 + ml^2}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \Omega_n t + \varphi_0,$$

$$\vartheta(t) = 2 \frac{J_1 + ml^2}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \cdot mgl \sin \vartheta_0 \cdot \sin^2 \left( \frac{\Omega_n t}{2} \right) + \vartheta_0,$$

$$\psi(t) = \dot{\psi}_0 \left( 1 - \frac{mgl \cos \vartheta_0}{J_3 \dot{\psi}_0^2} t \right) + \frac{(J_1 + ml^2) mgl \cos \vartheta_0}{J_3^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \Omega_n t + \psi_0. \quad (46.13)$$

Движение можно рассматривать как медленную прецессию вокруг вертикали. Скорость прецессии тем меньше, чем больше угловая скорость собственного вращения. На это медленное движение накладывается колебание с малой амплитудой и высокой частотой  $\Omega_n$ . Одновременно происходят малые колебания угла нутации  $\vartheta$  с частотой  $\Omega_n$ .

### 14.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим консервативные одномерные системы. Динамические уравнения для этих систем имеют первый интеграл — интеграл энергии, что позволяет провести качественный анализ характера движения и записать формальное выражение для закона движения точки в виде

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (1.14)$$

Здесь  $x_0$  — начальная координата, а параметр  $E$  — энергия, определяемая начальными условиями.

Аналитическое представление закона движения связано с возможностью выполнить интегрирование, т. е. представить решение в виде элементарных или специальных функций, свойства которых хорошо известны. Представление закона движения в явном виде связано с дополнительной возможностью обращения полученных функций.

Ясно, что это возможно лишь в исключительных случаях для ограниченного класса функций  $U(x)$  и, как правило, при некоторых определенных значениях энергии  $E$ , т. е. лишь при определенных значениях начальных условий. Будем называть задачу, допускающую представление решения в таком виде, невозмущенной, а соответствующее решение — невозмущенным решением:

$$x = \bar{x}(t).$$

Практический интерес представляет построение решения в виде «простых» комбинаций невозмущенных решений при некотором «малом» изменении потенциальной энергии. Будем считать, что потенциальная энергия может быть представлена в виде

$$\tilde{U}(x) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) \quad (2.14)$$

где параметр  $\varepsilon$  — «малый» параметр, который может быть связан с некоторым «малым» параметром, характеризующим отклонение от невозмущенного решения  $\bar{x}(t)$ .

Назовем такую систему возмущенной, а слагаемое  $\varepsilon U_1(x)$  — возмущением. В частности, возмущение может иметь вид  $\varepsilon U_1(x) = -\Delta E$ , что соответствует изменению только начальных условий задачи без изменения сил, действующих на точку.

Теория возмущений изучает методы построения решений возмущенной задачи с заданной точностью в некоторой области изменения времени в виде простых комбинаций определенных функций.

Предположим, что возмущенное решение

$$x = x(t, \varepsilon)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится всюду в области изменения переменной  $0 \leq t \leq t_0$  к невозмущенному решению  $x(t, 0) = \bar{x}(t)$ , т. е. выполняется условие

$$|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

для всех  $t$  из указанной области.

Возмущенные решения, обладающие такими свойствами, называются регулярными. Возмущения, не обладающие этим свойством, называют сингулярными.

Возмущенное решение мы будем представлять с помощью удобных для анализа «простых» функций

$$x = \mathbf{x}(t, \varepsilon),$$

которые при  $\varepsilon \neq 0$  могут отличаться от возмущенного решения  $x = x(t, \varepsilon)$  на некоторую величину.

Если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  отличие исчезает, т. е.

$$|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

то функции  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  называют асимптотическим приближением возмущенного решения, а соответствующая теория является асимптотической теорией возмущений. Для оценки отклонения возмущенного решения от невозмущенного удобно представить решение в виде функционального ряда по параметру возмущения  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_n(t) \varepsilon^n.$$

Функции  $\mathbf{x}_n(t)$  могут быть любыми ограниченными функциями (кроме  $\mathbf{x}_0(t) = x(t)$ ), но обычно в качестве таких функций выбирают решение невозмущенной задачи или функции, получаемые из этих решений с помощью последовательного интегрирования или дифференцирования. Конкретные методы построения таких функций определяют ту или иную теорию возмущений.

Мы будем рассматривать такие ряды, что  $N$ -я частичная сумма ряда

$$\mathbf{x}_N(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \mathbf{x}_n(t) \varepsilon^n$$

является асимптотическим приближением возмущенного решения, причем приближением с точностью порядка  $o(\varepsilon^N)$ , т. е.

$$|\mathbf{x}_N(t, \varepsilon) - \mathbf{x}(t, \varepsilon)| < \varepsilon^N$$

Если ряд является сходящимся при рассматриваемых значениях параметра возмущения  $\varepsilon$  в некоторой области изменения  $t$ , то увеличение  $N$  приводит к увеличению точности представления возмущенного решения.

Асимптотическое представление возмущенного решения возможно и с помощью расходящегося ряда. Если ряд расходится при выбранном значении возмущения  $\varepsilon$ , то частичные суммы могут быть устроены так, что при  $N < N_0$  точность представления возмущенного решения возрастает, и лишь начиная с некоторого номера  $N_0$  точность падает.

Асимптотические ряды могут быть использованы для оценки или вычисления квадратур вида (1.14), возникающих при интегрировании уравнений движения консервативных систем. рассмотрим один из методов построения асимптотического ряда для такой задачи и обсудим условия сходимости. Пусть решение возмущенной задачи представлено в виде квадратуры:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \varepsilon U_1(x)}}. \quad (3.14)$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения переменных  $0 \leq x < a$  подынтегральное выражение определено в каждой точке, т. е. всюду в этой области выполняется условие

$$E - \tilde{U}(x) \geq c > 0.$$

Предположим, что в этой области существует невозмущенное решение, удовлетворяющее аналогичным условиям.

Представим подынтегральное выражение в виде произведения

$$\frac{1}{\sqrt{E - U(x) - \varepsilon U_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon U_1(x)}{E - U(x)}}}.$$

Второй сомножитель этого произведения может быть представлен в виде формального ряда, так что подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{E - \tilde{U}(x)}} = \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left[ \frac{\varepsilon U_1(x)}{E - U(x)} \right]^n, \quad (4.14)$$

что приводит к выражению

$$t(x) = \bar{t}(x) + \Delta t(x, \varepsilon).$$

Если закон движения в отсутствие возмущения  $x = \bar{x}(t)$ , то учет поправки дает неявное выражение для возмущенного движения

$$x(t) = \bar{x}(t - \Delta t(x)).$$

Неявное уравнение можно решить методом итераций, если  $\varepsilon$  мало. Первая итерация дает

$$\Delta t(x) \approx \Delta t(\bar{x}(t))$$

так что

$$x(t) \approx \bar{x}(t - \Delta t(\bar{x}(t))) \approx \bar{x}(t) - \bar{x}'(t) \Delta t(\bar{x}(t))$$

Замечательно, что эта формула может быть использована и вблизи от точки остановки, хотя интеграл в этой точке расходится, так что разложение (4.14) оказывается неприменимо.

Конечно, представление решения в виде ряда целесообразно лишь в тех случаях, когда вычисление членов этого ряда проще, чем интеграла (3.14).

В системах, совершающих колебания, часть времени частица проводит вблизи точек остановки  $x = x_{1,2}$ , где подынтегральное выражение имеет особенность, так как

$$E - U(x_{1,2}) = 0.$$

Мы будем считать, что и в возмущенной и в невозмущенной задачах точки остановки находятся вдали от точек равновесия, так что  $U'(x_{1,2}) \neq 0$ . Соответственно для возмущенной задачи точки остановки

определяются уравнением

$$E - \tilde{U}(x_{1,2}) = 0,$$

и мы предположим, что

$$\tilde{U}'(x_{1,2}) \neq 0.$$

Рассмотрим возможность применения теории возмущений вблизи особых точек для определения периода колебаний возмущенной системы. Период колебаний невозмущенной системы определяется выражением

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Для определения периода колебаний возмущенной системы не обходимо вычислить интеграл

$$\tilde{T}(E) = \sqrt{2m} \int_{\tilde{x}_1(E)}^{\tilde{x}_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \varepsilon U_1(x)}}$$

Предположим, что возмущение достаточно мало, так что всюду в области интегрирования выполняется условие равномерной сходимости ряда

$$\varepsilon \left| \frac{U_1(x)}{E - U(x)} \right| < 1$$

которое нарушается лишь в граничных точках, где

$$E - U(\tilde{x}_{1,2}) \approx \varepsilon U_1(\tilde{x}_{1,2}).$$

Подынтегральное выражение может быть разложено в ряд, однако условия теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру в особых точках нарушаются. Это приводит к нарушению условий сходимости ряда в точках  $x = x_{1,2}$ , поскольку при  $x \rightarrow x_{1,2}$  в случае  $U_1(x_{1,2}) \neq 0$

$$\varepsilon \left| \frac{U_1(x_{1,2})}{E - U(x_{1,2})} \right| \rightarrow \infty.$$

Биномиальный ряд, представляющий второй сомножитель в выражении (4.14), имеет радиус сходимости  $R = 1$ , так что при выполнении условия

$$\varepsilon \left| \frac{U_1(x)}{E - U(x)} \right| < 1 \quad (5.14)$$

подынтегральное выражение представлено равномерно сходящимся рядом. Неравенство позволяет в заданной области изменения координаты определить величину параметра возмущения, обеспечивающего равномерную сходимость. Если возмущение задано, то это неравенство определяет область изменения координат, где ряд сходится равномерно.

Равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, поэтому при выполнении условия (5.14) решение возмущенной задачи может быть представлено в виде

$$t(x) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \left[ \frac{U_1(x)}{E - U(x)} \right]^n.$$

Мы предполагаем, что функции, представляющие закон движения невозмущенной задачи  $t = \bar{t}(x)$ , позволяют представить  $x = \bar{x}(t, E)$  с помощью простых функций. В этом случае решение представляется сходящимся рядом

$$t(x) = \bar{t}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \int_{x_0}^x dt \left[ \frac{U_1(x(t))}{E - U(x(t))} \right]^n \quad (6.14)$$

Здесь проведена замена переменной

$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Для оценки получающихся интегралов удобно использовать тождество

$$\frac{2^n}{(2n-1)!!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx (E - U(x))^{n-1/2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

При дифференцировании верхнего и нижнего пределов мы учли, что

$$E - U(x_{1,2}) = 0.$$

С помощью этого тождества период возмущенного движения может быть представлен в виде

$$\tilde{T}(E) = \frac{2^n}{(2n-1)!!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \sqrt{2m} \int_{\tilde{x}_1(E)}^{\tilde{x}_2(E)} dx (E - U(x) - \varepsilon U_1(x))^{n-1/2}$$

Предполагая, что всюду в области  $\tilde{x}_1 < x < \tilde{x}_2$  выполнено условие разложимости в ряд, получим для оценки периода выражение

$$\tilde{T}(E) = \frac{2^n}{(2n-1)!!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \sqrt{2m} \int_{\tilde{x}_1(E)}^{\tilde{x}_2(E)} dx (E - U(x))^{n-1/2} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k \left( \frac{U_1(x)}{E - U(x)} \right)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k \left( \frac{U_1(x)}{E - U(x)} \right)^k \right\}$$

Пусть для определенности  $U_1(x) > 0$  всюду в области. Тогда  $x_1 < \tilde{x}_1$ , а  $x_2 > \tilde{x}_2$ , т. е. точки лежат за границами области возможного движения возмущенной задачи. Поскольку мы предполагаем, что  $U(x_{1,2}) \neq 0$ , при вычислении интегралов от первой суммы  $0 \leq k \leq n$  пределы интегрирования  $\tilde{x}_{1,2}$  можно заменить на  $x_{1,2}$ , причем ошибка вычисления интеграла при такой замене будет порядка  $\varepsilon^{n+1/2}$ .

Аналогичная оценка может быть получена для любой функции  $U_1(x)$ , достаточно гладкой и удовлетворяющей условию  $U_1'(x_{1,2}) \neq 0$ .

При интегрировании второй суммы нельзя изменить пределы интегрирования для каждого слагаемого, однако эта сумма при сделанных предположениях не превышает слагаемого при  $k = n$ . Таким образом, с помощью полученного выражения мы имеем асимптотическое представление периода

$$\tilde{T} = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} U_1(x) + \dots + O(\varepsilon^n)$$

Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$ , имеем

$$\tilde{T} = T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_0^{T_2} dt U_1^n(\bar{x}(t)).$$

Здесь  $T$  — период невозмущенного движения,  $x = \bar{x}(t)$  — закон движения точки в невозмущенной задаче.

Вообще говоря, условие равномерной сходимости существенно, но не является необходимым для почленного интегрирования ряда, так что при указанных условиях ряд теории возмущений будет сходящимся

В практически важном случае, когда

$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

уравнение движения оказывается линейным, а закон невозмущенного движения представляется элементарной функцией

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ где } \omega_0^2 = k/m.$$

В этом случае изменение периода вычисляется особенно просто:

$$\tilde{T} = T \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_0^{2\pi} d\psi U_1^n \left( \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \psi \right) \right). \quad (7.14)$$

В качестве примера применения изложенного метода вычислим период колебаний системы, полагая

$$U(x) = \frac{k_0 x^2}{2}, \quad \varepsilon U_1(x) = \frac{k_1 x^2}{2}$$

Невозмущенное движение — гармонические колебания, период которых  $T = 2\pi\sqrt{m/k_0}$ , а закон движения

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{2E}{k_0}} \cos \psi$$

где  $\psi = \omega_0 t + \psi_0$ .

Выражение для периода колебаний в этом случае представляется рядом

$$\tilde{T} = T \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (k_1/k_0)^n \int_0^{2\pi} d\psi \cos^{2n} \psi \right).$$

Интеграл легко берется

$$\int_0^{2\pi} d\psi \cos^{2n} \psi = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{2n!!},$$

так что выражение для периода приводится к виду

$$\tilde{T} = T \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} (k_1/k_0)^n \right). \quad (8.14)$$

При выполнении условия  $|k_1/k_0| < 1$  полученный ряд сходится и сумма его вычисляется:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} (k_1/k_0)^n = \frac{1}{\sqrt{1+k_1/k_0}}$$

Отсюда следует, что период возмущенного движения при условии  $|k_1/k_0| < 1$  выражается формулой

$$\tilde{T} = 2\pi \sqrt{m/(k_0 + k_1)},$$

т. е. совпадает с точным выражением.

При  $|k_1/k_0| > 1$  полученный ряд расходится, однако в области  $k_1/k_0 - 1 \ll 1$  он может быть использован для оценки периода колебаний, поскольку остаточный член ряда сначала убывает с ростом  $n$ .

Остаточный член ряда может быть представлен в виде

$$r_n(\xi) = \vartheta (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \xi^{n+1},$$

где  $0 < \vartheta < 1$ ,  $\xi = k_1/k_0$ . Таким образом, хотя ряд расходится, при любом  $n > 0$  выполняется условие

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{\xi^n} = 0,$$

т. е. ряд является асимптотическим представлением функции

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}.$$

При  $k_1 > 0$  ряд является знакопеременным, так что остаточный член ряда не превышает первого отброшенного члена. Это приводит к тому, что увеличение точности представления функции  $f(\xi)$  в области, где ряд расходится, происходит с ростом  $n$  лишь до тех пор, пока члены ряда  $U_n$  удовлетворяют условию

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{n+1/2}{n+1} \xi < 1.$$

Это отношение убывает для всех целых  $n$ , удовлетворяющих неравенству

$$n < n_{opt} = \left[ \frac{2-\xi}{2\xi-2} \right],$$

где  $[p]$  — целая часть числа  $p$ .

Поведение суммы первых  $n$  членов ряда для случая  $\xi = 1.1$  иллюстрирует рис. 1.14.

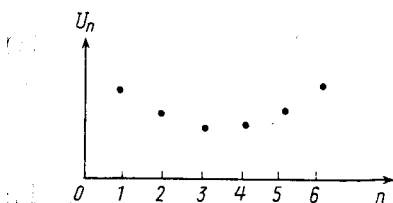


Рис. 1.14

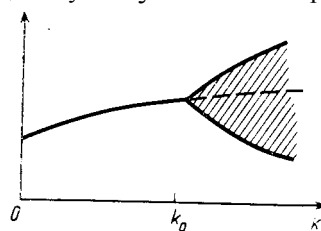


Рис. 2.14



Рассматриваемые свойства асимптотического ряда вызваны тем, что ряд, заданный своими коэффициентами, определяет функцию неоднозначно. Можно показать, что две функции, представляющиеся асимптотическими рядами, коэффициенты которых одинаковы, могут отличаться на экспоненциально малую величину. Такая погрешность, не представимая степенными рядами, может существенно менять характер поведения решения динамических уравнений.

Вернемся к ряду (8.14), представляющему поведение периода колебаний осциллятора. Поскольку в области  $\xi > 1$  асимптотический ряд может быть использован лишь для определения границ области, в которой находится решение, выберем для каждого  $n$  оптимальное значение членов ряда, чтобы минимизировать ошибку

$$n = n_{opt},$$

и построим границы области, внутри которой может находиться функция, представляемая этим рядом. Это построение иллюстрирует рис. 2.14. В области сходимости ряда теории возмущений определена функция  $f(\xi)$ . За пределами этой области ряд не представляет определенной функции. Решение исходной задачи в этой области может оказаться достаточно «простым», а может быть и таким, что представление его с помощью элементарных функций и их комбинаций невозможно. Эти выводы полностью переносятся на асимптотические ряды, коэффициенты которых являются функциями времени и представляют закон движения точки. Очень сложное поведение решений динамических уравнений в области неустойчивости и явления динамического хаоса как раз и дают примеры явлений, не описываемых в рамках такого подхода.

Во многих случаях ряды теории возмущений используются лишь для оценки характера решения и его зависимости от параметров, поэтому часто достаточно ограничиться лишь первыми членами разложения асимптотического ряда. Такой подход можно проиллюстрировать на примере математического маятника. Определим в первом порядке теории возмущений поправку к периоду колебаний математического маятника. Интеграл энергии для маятника

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = E \quad (9.14)$$

приводит к формальному выражению для закона движения

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{E + mgl \cos \varphi}}. \quad (10.14)$$

Будем рассматривать такие значения энергии

$$E = -mgl(1 - \varepsilon), \text{ где } \varepsilon > 0 \quad (11.14)$$

что в области возможных движений  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  можно ограничиться лишь первыми членами разложения потенциальной энергии, полагая

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}.$$

Остаточный член знакопеременного ряда удовлетворяет условию  $|r_n(\varphi)| < \varphi_{\max}^4/24$ , что дает при  $\varphi_{1,2} \approx 1$   $|r_n(\varphi_{1,2})| < 0.05$ . Поправка к потенциальной энергии

$$\delta U(\varphi) = -mgl \frac{\varphi^4}{24},$$

что приводит к выражению для периода в первом порядке по  $\varepsilon$ :

$$\tilde{T} = T \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\varepsilon^2}{6} \cos^4 \psi \right).$$

Вычисляя интеграл и выполняя дифференцирование по  $\varepsilon$ , Имеем

$$\tilde{T} = T(1 + \varepsilon/8) = T(1 + \varphi_{\max}^2/16).$$

Отметим еще раз, что рассматриваемая теория возмущений неприменима вблизи точек локального максимума потенциальной энергии.

Пользуясь полученными результатами, можно вычислить не только поправку к периоду колебаний, но и поправку к закону движения. Подставляя в формулу (10.14) выражение (11.14) для потенциальной энергии возмущений, в первом порядке малости получим искомое выражение

$$\Delta t = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varepsilon - \varphi^2/2}} \frac{\varphi^4/24}{\varepsilon - \varphi^2/2}.$$

Здесь мы предполагаем, что начальные условия выбраны в виде

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) > 0.$$

Учитывая, что невозмущенное движение  $\varphi = \bar{\varphi}(t)$  — гармонические колебания

$$\varphi = \varphi_{\max} \sin \omega_0 t, \text{ где } \varphi_{\max} = \sqrt{2\varepsilon},$$

проведем замену переменных в интеграле, полагая  $\psi(\varphi) = \arcsin(\varphi/\varphi_{\max})$ .

$$\Delta t = \frac{\varepsilon}{12\omega_0} \int_0^\psi d\psi \frac{\sin^4 \psi}{\cos^2 \psi}.$$

Интеграл легко вычисляется, так что поправка к закону движения имеет вид

$$\Delta t = \frac{\varepsilon}{12\omega_0} \left( \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{2} \sin \psi \cos \psi - \frac{3}{2} \right).$$

Учитывая сделанную замену переменной, мы имеем зависимость

$$\Delta t = \Delta t(\varphi).$$

Закон движения с учетом поправки можно получить в явном виде, используя итерацию:

$$\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) - \bar{\varphi}' \Delta t(\bar{\varphi})$$

что приводит к окончательному результату

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin \omega_0 t - \frac{\varphi_{\max}}{16} \left( \omega_0 t \cos \omega_0 t - \frac{3}{4} \sin \omega_0 t - \frac{\sin 3\omega_0 t}{4} \right). \quad (12.14)$$

При  $\omega_0 t \sim 1/\varepsilon$  формула (12.14) неприменима.

Обобщение можно получить, полагая, что движение периодическое, как это следует из теории качественного исследования, а непериодические «секулярные» члены возникли в результате разложения периодических функций. Это позволяет предполагать, что возмущенное движение описывается выражением

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \left( 1 + 7\varphi_{\max}^2/192 \right) \sin \omega t - (3\varphi_{\max}/8) \sin 3\omega t, \quad (13.14)$$

где  $\omega = \omega_0 \left( 1 - \varphi_{\max}^2/16 \right)$ .

Таким образом, применение теории возмущений позволяет сделать вывод, что появление высших членов разложения потенциальной энергии вблизи точки локального минимума приводит к изменению периода колебаний и, значит, изменению основной частоты. Вторым эффектом является возникновение гармоник этой новой частоты.

## 14.2. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Исследуем подробнее движение динамической системы в окрестности положения неустойчивого равновесия. Для упрощения вычислений рассмотрим материальную точку (частицу) массы  $m$ , движущуюся вдоль оси  $OX$  инерциальной системы отсчета под действием только потенциальных сил, не зависящих явно от времени.

Выберем начало координат так, чтобы оно совпадало с положением неустойчивого равновесия и положим  $U(0) = 0$ . Будем считать, что в окрестности положения неустойчивого равновесия существует такая область изменения  $x$ , в которой потенциальная энергия может быть аппроксимирована квадратичной функцией

$U(x) = -k \frac{x^2}{2}$ , где  $k = -U''(0) > 0$  - характеристика системы. Закон движения в этом случае нетрудно

определить, например, из интеграла энергии:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (14.14)$$

Явное выражение для закона движения зависит от начального состояния частицы.

Для случая  $E_1 = \varepsilon > 0$  движение возможно всюду в рассматриваемой области. Положим, что при  $t = 0$  частица находилась в точке равновесия  $x(0) = 0$ , причем  $\dot{x}(0) > 0$ . Квадратура в этом случае элементарно вычисляется:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon + kx^2/2}} = \frac{1}{\omega_0} \ln(\xi + \sqrt{1 + \xi^2}), \text{ где } \xi = x\sqrt{k/2\varepsilon}, \text{ а } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Явная зависимость координаты точки от времени имеет вид:

$$x(t) = x_0 \operatorname{sh} \omega_0 t. \quad (15.14)$$

Здесь  $x_0 = \sqrt{2\varepsilon/k}$  - параметр размерности длины, определяемый энергией точки.

При  $E_2 = -\varepsilon < 0$  область возможного движения ограничена условием:  $|x| > x_0 = \sqrt{2\varepsilon/k}$ . Полагая, что в начальный момент времени  $t = 0$  частица находится в области  $x > 0$  на границе области возможного движения:  $x(0) = x_0 = \sqrt{2\varepsilon/k}$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , и вычисляя квадратуру, запишем закон движения в явном виде:

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} \omega_0 t. \quad (16.14)$$

В этом случае частица движется в положительном направлении оси  $OX$ .

Значение энергии  $E_3 = 0$  является граничным. Оно разделяет рассмотренные выше случаи и поэтому называется сепаратрисным. Поскольку несобственный интеграл в точке  $x = 0$  расходится, эта точка является недостижимой за конечное время. Закон движения в области  $x > 0$  для случая  $\dot{x} > 0$  имеет вид:

$$x(t) = x^* \exp \omega_0 t. \quad (17.14)$$

Константа интегрирования здесь определяется положением точки в начальный момент времени  $x(0) = x^*$ .

Таким образом, в зависимости от значения полной энергии частицы, движение в окрестности положения неустойчивого равновесия существенно различно. Однако, при достаточно больших временах движения (по сравнению с характерным временем системы), когда выполняется условие  $\omega_0 t \gg 1$ , функциональная зависимость координаты частицы от времени для всех трех случаев одинакова. Все три выражения можно сделать асимптотически совпадающими подходящим выбором константы интегрирования  $x^*$ . В последнем случае, выбирая константу в виде

$$x^* = x_0/2. \quad (18.14)$$

При таком выборе начального положения частицы время ее движения во всех трех случаях асимптотически одинаково.

Этим обстоятельством можно воспользоваться для приближенного вычисления времени движения частицы из указанного начального положения в произвольном поле  $U(x)$ , имеющем локальный максимум при  $x = 0$ .

Пусть частица имеет энергию  $E$ , близкую к сепаратрисному значению  $E_0$ . Положим для определенности

$E = E_0 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ , и будем считать, что квадратура при  $E = E_0$  выражается в элементарных

функциях. Пусть в начальный момент частица находится вблизи положения равновесия, например на границе области возможного движения

$$x(0) = x_0.$$

В окрестности локального максимума потенциальная энергия может быть аппроксимирована с заданной точностью лишь квадратичными членами:

$$U(x) = U_{\max} - k \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Если полная энергия частицы мало отличается от сепаратрисного значения, то частица, начавшая движение из точки  $x(0) = x_0 \approx \sqrt{2\varepsilon/k}$ , в течение достаточно большого времени (по сравнению с характерным временем системы  $\omega_0 t \gg 1$ ) останется в рассматриваемой области. В этом случае время движения можно приближенно вычислять с помощью интеграла (14.14), полагая  $E = E_0$  и заменив при этом нижний предел интегрирования  $x_0 \rightarrow x^* = x_0/2 = \sqrt{\varepsilon/2k}$ :

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0(\varepsilon)}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \approx \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x^*(\varepsilon)}^x \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}. \quad (19.14)$$

Этот прием, основанный на совпадении асимптотического поведения решения при  $\varepsilon \neq 0$  при больших временах  $\omega_0 t \gg 1$  и сепаратрисного решения вблизи точки неустойчивого равновесия называется методом сшивания.

Метод сшивания решений можно использовать, например, для вычисления периода больших колебаний математического маятника, когда амплитуда его колебаний лишь немного меньше  $\pi$ . Пусть

$U(\varphi) = -mgl \cos \varphi$ , а полная энергия меньше сепаратрисной  $E = mgl - \varepsilon$ . Период колебаний маятника определяется выражением:

$$T(\varepsilon) = 2 \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_{-\varphi_m(\varepsilon)}^{\varphi_m(\varepsilon)} \frac{d\varphi}{\sqrt{mgl(1 + \cos \varphi) - \varepsilon}},$$

где амплитуда колебаний ограничена областью возможного движения:

$$mgl(1 + \cos \varphi_m) - \varepsilon = 0.$$

При  $\varepsilon \ll mgl$  амплитуда колебаний  $\varphi_m \approx \pi - \sqrt{2\varepsilon/mgl}$ . Применяя рассмотренный выше метод, получим для оценки периода больших колебаний:

$$T(\varepsilon) \approx 2 \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_{-\varphi^*(\varepsilon)}^{\varphi^*(\varepsilon)} \frac{d\varphi}{\sqrt{mgl(1 + \cos \varphi)}},$$

где  $\varphi^* = \pi - \sqrt{\varepsilon/2mgl}$ .

Выполняя интегрирование, получим:

$$T = \frac{2}{\omega_0} \ln \left( \frac{1 + \sin(\varphi^*/2)}{1 - \sin(\varphi^*/2)} \right) \approx \frac{2}{\omega_0} \ln \left( 32 \frac{mgl}{\varepsilon} \right). \quad (20.14)$$

Зависимость периода колебаний математического маятника от энергии для любых ее значений можно получить, вычисляя интеграл

$$T = 4 \sqrt{ml^2} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{E + mgl \cos \varphi}}, \quad (21.14)$$

который заменой переменных  $\sin \xi = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_m/2)}$  — сводится к эллиптическому

$$T = \frac{4}{\omega_0} K(\sin(\varphi_m/2)), \quad (22.14)$$

где  $\varphi_m$  — амплитуда колебаний, а

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Зависимость периода движений математического маятника от энергии представлена на рис. 3.14. Полученные нами выражения соответствуют первым членам

разложения эллиптического интеграла по амплитуде при малых  $\varphi_m \ll 1$  и больших  $\varphi_m \sim \pi$  значениях.

Область энергии  $E < mgl$  на рис. 3.14 соответствует колебаниям, а при  $E > mgl$  происходит вращение. В этом случае  $T$  — период вращения.

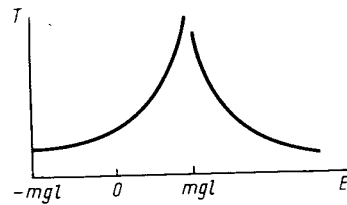


Рис. 3.14

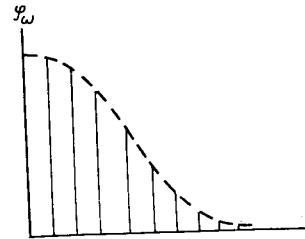


Рис. 4.14

В области сильной нелинейности спектр колебаний маятника богат гармониками основной частоты. В пределе  $E \rightarrow mgl$  спектр становится непрерывным, что соответствует асимптотически медленному движению. В этом предельном случае вычисление спектра особенно просто. Вычислим для примера спектр скорости маятника:

$$\dot{\varphi}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi}(t) \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\text{ch}(\pi\omega/2\omega_0)}. \quad (23.14)$$

Соответственно спектр колебаний угла имеет вид

$$\varphi_\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\text{ch}(\pi\omega/2\omega_0)}. \quad (24.14)$$

В случае колебаний с периодом  $T \gg 2\pi/\omega_0$  коэффициенты  $b_n$  фурье-гармоник четной функции  $\dot{\varphi}(t)$  приближенно описываются формулой

$$b_n \approx \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0}{\text{ch}(\pi n \Omega / 2\omega_0)}$$

Характер спектра скорости в этом случае представлен на рис. 4.14. Спектр является дискретным с шириной между линиями  $\Delta\omega = \omega(\varphi_m)$ . При  $\varphi_m \rightarrow \pi$   $\Delta\omega \rightarrow 0$ .

### 14.3. ЛОКАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ «ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ»

Мы определили нелинейные колебания как финитное движение, описываемое нелинейными уравнениями. Основными характерными свойствами таких колебаний, в отличие от линейных, являются следующие:

- 1) нелинейные колебания являются неизохронными, т. е. период колебаний зависит от начальных условий;
- 2) колебания являются негармоническими, т. е. закон движения точки не является зависимостью вида  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ . При исследовании нелинейных колебаний негармонический характер их сильно усложняет описание. В частности, построение теории возмущений в виде асимптотических рядов, рассмотренное в п. 14.1, удобно проводить, если невозмущенное движение — гармонические колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. В случае консервативных одномерных систем удобно бывает провести замену переменных так, чтобы в новых координатах  $q(t)$  движение было гармоническим.

Предположим, что область возможного движения при некоторых значениях  $E$  ограничена,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , причем время достижения особых точек конечно. В этом случае в системе существуют колебания, а закон движения определяется интегралом (1.14).

Период колебаний — минимальное время возврата системы в исходное состояние — определяется выражением

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (25.14)$$

Здесь использовано обозначение контурного интеграла в смысле интегрирования по обеим ветвям уравнения (1.14) в зависимости от направления движения. Основная частота колебаний  $\Omega = 2\pi/T$ . Отметим, что мы рассматриваем существенно нелинейные колебания, так что частота колебаний зависит от энергии

$$\Omega = \Omega(E)$$

Определим фазу  $\varphi$ , линейно растущую со временем:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0 = \Omega \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \varphi_0 \quad (26.14)$$

и введем новую переменную  $q$ , которая будет периодической функцией времени с периодом  $T$ , и изменяется по гармоническому закону:  $q = q_0 \sin \varphi$ . В этом выражении  $q_0$ —некоторый параметр—амплитуда колебаний. Обобщенная скорость, соответствующая выбранной координате, определяется дифференцированием

$$\dot{q} = \Omega q_0 \cos \varphi,$$

что приводит к интегралу энергии в новых переменных

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{\Omega^2 q^2}{2} = \frac{\Omega^2 q_0^2}{2}. \quad (27.14)$$

Мы построили гармоническую переменную, вводя промежуточные переменные  $q_0$  и  $\varphi$  — амплитуду и фазу колебания. В ряде задач эти переменные, удовлетворяющие системе уравнений первого порядка, оказываются удобными. Однако эти переменные не являются каноническими. Нетрудно ввести пару канонически сопряженных переменных  $I, \varphi$ , вместо амплитуды вводя переменную  $I = I(q_0)$ —действие,—зависящую от амплитуды  $q_0$ . Так как для гармонических колебаний энергия (27.14) зависит только от амплитуды колебаний, а не от фазы, функция Гамильтона  $H \equiv E(I, \varphi)$  зависит лишь от действия

$$H = H(I), \quad \dot{i} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

Выполняя дифференцирование

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \Omega^2 q_0 \frac{\partial q_0}{\partial I} = \Omega(I),$$

получим связь между амплитудой  $q_0$  и новой переменной  $I$ :

$$I = \frac{\Omega q_0^2}{2}.$$

Канонические уравнения в новых переменных действие—угол имеют вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \Omega(H), \quad \dot{i} = -\frac{\partial H(I)}{\partial \varphi} = 0,$$

откуда следует, что  $H = \int \Omega(H) dH$ , а зависимость  $\Omega = \Omega(H)$  от энергии системы позволяет определить переменную  $I$  из первого уравнения непосредственно, не обращаясь к промежуточным выкладкам:

$$I = \int \frac{dH}{\Omega(H)} = \frac{1}{2\pi} \int T(H) dH. \quad (28.14)$$

При этом предполагается, что  $\Omega(H)$  не обращается в нуль. Подставляя

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

и интегрируя выражение (30.14) по параметру  $H$ , получим зависимость

$$I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2m} \oint \sqrt{H - U(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \oint p(x) dx,$$

где  $p(x)$  — импульс, сопряженный координате  $x$ . Выражая отсюда  $H = H(I)$ , мы получим гамильтониан системы в переменных действие—угол. Частота основных колебаний определяется теперь дифференцированием  $\Omega = \partial H / \partial I$ .

Таким образом, использование переменных действие—угол позволяет ввести обобщенные координаты  $q = q(x)$  такие, что для любых финитных движений системы с некоторым периодом  $T$  колебания в этих переменных будут гармоническими (но не изохронными). Это свойство переменных привело к широкому использованию их в теории.

В качестве примера построим «гармонические» координаты для математического маятника, совершающего большие колебания. Пусть энергия маятника  $E = mgl(1 - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . Из интеграла энергии (9.14) определим амплитуду колебаний  $\varphi_m$ :

$$mgl(1 - \varepsilon) = -mgl \cos \varphi_m.$$

Вводя  $\delta = \pi - \varphi_m \ll 1$ , получим  $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ . Период колебаний математического маятника в этом случае вычислен нами:

$$T(\varepsilon) = \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Это выражение позволяет определить переменную  $I$ :

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int T(E) dE = I_0 - \frac{mgl}{\pi\omega_0} \varepsilon \left( 1 + \ln \frac{32}{\varepsilon} \right).$$

Значение константы  $I_0$  можно вычислить, используя выражение при  $\varepsilon = 0$ :

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \oint ml^2 \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi = \frac{8ml^2}{\pi} \omega_0,$$

где

$$\dot{\varphi}(\varphi) = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, для перехода к переменным, изменяющимся по гармоническому закону, достаточно ввести амплитуду

$$q_0 = \sqrt{\frac{2I}{m\Omega}}, \text{ где } I = \frac{8ml^2}{\pi} \omega_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{8} \left( 1 + \ln \frac{32}{\varepsilon} \right) \right),$$

а частота колебаний

$$\Omega = \frac{\pi\omega_0}{\ln(32/\varepsilon)}.$$

Переменная  $q(t) = q_0 \sin(\Omega t + \varphi_0)$  является искомой переменной.

Приведенные рассуждения показывают, что основным критерием нелинейности системы выступает неизохронность колебаний, т. е. зависимость периода или частоты от начальных условий. В дальнейшем будем называть колебания нелинейными, если они являются неизохронными в канонических переменных во всей области возможных начальных условий.

## 16.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Определение эволюции некоторой динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями с заданными начальными условиями, сводится к решению задачи Коши. (Корректность такой процедуры обеспечивается выполнением условий теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений). В механике решение уравнений движения производится посредством построения первых интегралов, что позволяет в ряде случаев получить полное решение поставленной задачи. Регулярная процедура построения решений в этом случае для канонических систем с помощью уравнения Гамильтона — Якоби рассматривалась в гл. 8.

Задачи, для которых решение уравнений может быть построено указанным методом, мы назвали интегрируемыми. Практически лишь в редких случаях удается найти полный набор первых интегралов. Более того, после работ А. Пуанкаре по исследованию динамических систем стало ясно, что существование интегралов движения является не правилом, а исключением, так что основной случай динамики — неинтегрируемые задачи. Заметим, что результаты Пуанкаре касаются существования однозначных интегралов для всех допустимых начальных условий и параметров механической задачи. Это не исключает возможности существования интегралов для отдельных значений параметров или начальных условий. Таким образом, решение динамической задачи в большинстве случаев связано с необходимостью замены уравнений, описывающих исследуемую неинтегрируемую систему другими, «близкими» к ней, но интегрируемыми, решения которых могут быть легко получены и отличаются от искомым на некоторую величину, которой можно пренебречь в рассматриваемой задаче.

Существует большое число различных приемов и методов решения поставленной задачи, определяемых в конечном итоге как характером изучаемой системы, так и поставленными целями. Мы рассмотрим лишь некоторые простейшие подходы к решению этой задачи.

В основе ряда методов теории возмущений лежит теорема о зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра и начальных условий. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_k, t, \varepsilon), \text{ где } i = 1, 2, \dots, N \quad (1.16)$$

а  $\varepsilon$  — некоторый параметр задачи, зависимость от которого предполагается достаточно гладкой. В начальный момент времени  $t = 0$   $x_i(0) = x_{i0}$ .

Как известно из теории дифференциальных уравнений, если функции  $f_i(x_k, t, \varepsilon)$  вместе со своими производными по  $x_k, t, \varepsilon$  непрерывны по всем переменным в некоторой области  $D$ :

$$D = \{0 \leq t \leq t_0, |x_k - x_{k0}| < b_k, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}.$$

то в некотором интервале изменения времени  $0 \leq t \leq T$  решение начальной задачи непрерывно по  $x_{k0}$  и параметру  $\varepsilon$ . Если при указанных условиях начальные значения являются параметрами, изменяющимися в некоторой области  $D_1$ , то решение задачи будет непрерывным также и по начальным параметрам в некоторой области изменения  $t$ .\*

Мы будем предполагать, что при  $\varepsilon = 0$  рассматриваемая система является интегрируемой и решение ее известно. Тогда решение системы, зависящее от параметра  $x_k = x_k(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \neq 0$ , является возмущенным. Очевидно, что для получения физически содержательного результата необходимо, чтобы выбранная интегрируемая система уравнений — «эталонная» — удовлетворяла некоторым условиям, связанным с физической постановкой задач механики. В частности, следует учесть эти обстоятельства — желательно выбрать интегрируемую эталонную систему грубой.

Начальные условия в задаче Коши принципиально могут быть определены лишь с некоторой точностью, поэтому желательно, чтобы малые ошибки при их определении не приводили к нарастающим отклонениям в законе движения, т. е. система должна быть устойчивой.

При выполнении указанных условий зависимость решений от начальных значений и параметра позволяет строить решение, описывающее возмущенное движение.

Перечислим некоторые из методов решения задач динамики.

Из наиболее простых методов, широко применяемых во многих задачах, назовем метод вариаций постоянных. При нахождении решений этим способом решение невозмущенной задачи представляется в виде

\* См.: Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.



$x_k = x_k(t, C_i(t), \varepsilon)$ , причем при  $\varepsilon = 0$   $C_i(t) = C_{i0}$ .

Поскольку константы  $C_i$  определяются начальными условиями, метод вариации постоянных фактически предполагает, что возмущенное решение может быть получено путем непрерывной «подстройки» начальных условий невозмущенной задачи. Метод вариаций постоянных удобно использовать для определения частного решения линейной неоднородной системы.

Один из эффективных методов решения дифференциальных уравнений динамики с помощью рядов в конце прошлого века был предложен А. Пуанкаре. В основе метода лежит представление решения в виде ряда по параметру возмущения:

$$x_i(t, C_k, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_{ki}(t, C_m),$$

который с учетом требования аналитичности по параметру позволяет построить решение задачи Коши.

Еще один прием, широко используемый в задачах механики, связан с принципом разделения движений, т. е. с представлением закона движения динамической системы в виде

$$x_i(t) = \bar{x}_i(t) + \xi_i(t).$$

Для линейных систем такое представление может быть использовано, например, для задач о воздействии вынуждающей силы. Тогда  $\bar{x}_i(t)$  — решение однородной системы, а  $\xi_i(t)$  — частное решение неоднородного уравнения. Разделение движений эффективно в задачах, где имеются различные характерные временные масштабы, например в предложенном примере воздействия быстро осциллирующей силы на маятник, собственная частота колебаний которого мала. В этом случае функции  $\bar{x}_i(t)$  описывают некоторое усредненное движение, а  $\xi_i(t)$  соответствует быстрым осцилляциям вблизи этого усредненного движения.

Существует еще множество приемов, позволяющих находить решения различных задач. Однако, как правило, при решении задач используется комбинация различных методов. Так, построение рядов Пуанкаре в методе Пуанкаре — фон Цайпеля связано с последовательным интегрированием системы неоднородных уравнений, которые удобно выполнять методом вариаций постоянных. Метод приближенного решения уравнений для слабонелинейного осциллятора Крылова—Боголюбова или метод канонических преобразований в переменных действие — угол, опираются на процедуру усреднения, основанную на методе разделения движений, и т. д.

Широкое использование методов приближенного интегрирования создает иногда впечатление об их универсальности при анализе динамических систем. Следует, однако, помнить, что в большинстве случаев динамические уравнения неинтегрируемы, так что рассмотренные методы могут давать частную информацию лишь о поведении систем в ограниченной области начальных условий и параметров. В других областях параметров требуются совершенно другие подходы. Так, при описании существенно нелинейных неинтегрируемых систем в областях глобальной неустойчивости, аналогичной рассмотренной в гл. 15, целесообразен вероятностный подход, основанный на введении функции распределения в фазовом пространстве. К системам, в которых этот подход может быть применен при некоторых значениях параметров, относятся такие хорошо известные, как математический маятник, на который действует периодическая вынуждающая сила, нелинейные осцилляторы с двумя и более степенями свободы, классическая задача трех тел, электрический заряд в кулоновском поле, на который действует электромагнитная волна, и многие другие.

Все это требует от исследователя четкой постановки задачи и формулировки «желательного» окончательного ответа, а также его формы. Такая формулировка в значительной степени облегчает выбор модели переменных, в которой она описывается, и метода построения результирующей зависимости.

## 16.2. ПРЯМОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

Метод разделения движений связан с возможностью представления решения в виде суммы

$$x_i = \bar{x}_i + \xi_i$$

Вообще говоря, такое представление произвольно, и для его реализации необходимо наложить некоторые дополнительные условия. Как правило, эти условия определяются особенностями задачи. В частности, в качестве функции  $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t)$  может быть выбрано решение невозмущенной задачи

$$\dot{\bar{x}}_i = f_i(\bar{x}_k, t, \varepsilon = 0)$$

Если предполагать, что  $\xi_i$  мало, а правая часть уравнений движения допускает разложение по  $\varepsilon$  то, ограничиваясь линейными членами при  $\varepsilon \neq 0$  можно существенно упростить исследование движения возмущенной системы. В частности, такой подход может быть использован для анализа устойчивости по линейному приближению.

Чаще метод разделения движений используется в системах, характеризующихся различными временными масштабами. Тогда разделение движения в системе производится на быстрые и медленные. В этом случае  $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t)$  определяется из усредненных уравнений. Проиллюстрируем применение метода разделения движений в случае одномерного движения в быстро осциллирующем поле (метод Капицы, 1951 г.)

Пусть частица массы  $m$  движется под действием заданной силы  $F = F(x, t)$ , которую можно представить в виде суммы двух членов:

$$F(x, t) = F_0(x) + F_1(x, t).$$

Причем характерный масштаб времени для движения под действием силы  $F_0 - T_0$ , а сила  $F_1(x, t)$  быстро изменяется, так что ее характерный временной масштаб  $T_1$  удовлетворяет условию  $T_1 \ll T_0$ . Пусть для простоты  $F_1(x, t)$  - быстро осциллирующая сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$F_1(x, t) = \varepsilon F(x) \sin \omega_1 t.$$

Здесь малость параметра  $\varepsilon$ , вообще говоря, не предполагается. Положим, что решение уравнения движения частицы представимо в виде суммы

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi(t).$$

Далее потребуем, чтобы при  $\varepsilon = 0$  функция  $\bar{x}(t, 0)$  удовлетворяла уравнению

$$m \ddot{\bar{x}}(t, 0) = F_0(\bar{x}(t, 0)).$$

Действие возмущения существенно меняет характер медленного движения, так что

$$\bar{x}(t, \varepsilon) \neq \bar{x}(t, 0).$$

Поскольку представление движения произвольно, наложим дополнительное условие. Будем считать, что решение  $\bar{x} = \bar{x}(t, \varepsilon)$  описывает медленное движение, а  $\xi = \xi(t)$  - быстрое, так что при усреднении по периоду быстрых колебаний полного решения выполняется условие

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) dt$$

т. е.  $\xi = \xi(t)$  не дает вклада в медленное движение:

$$\int_0^{T_1} \xi(t) dt = 0 \quad \int_0^{T_1} \bar{x}(t, \varepsilon) \xi(t) dt = 0$$

Подставляя теперь решение вида (2.16) в уравнение возмущенного движения, получим

$$m \ddot{\bar{x}} + m \ddot{\xi} = F_0(\bar{x} + \xi) + \varepsilon F_1(\bar{x} + \xi) \sin \omega_1 t$$

Предположим, что в этом случае справедливы разложения

$$F_0(\bar{x} + \xi) = F_0(\bar{x}) + F_0'(\bar{x}) \xi + o(\xi),$$

$$F_1(\bar{x} + \xi) = F_1(\bar{x}) + F_1'(\bar{x}) \xi + o(\xi).$$

Это приводит нас к уравнению в линейном по  $\xi = \xi(t)$  приближении

$$m \ddot{\bar{x}} + m \ddot{\xi} = F_0(\bar{x}) + F_0'(\bar{x}) \xi + \varepsilon F_1(\bar{x}) \sin \omega_1 t + \varepsilon F_1'(\bar{x}) \xi \sin \omega_1 t$$

Усредняя полученное уравнение по времени за период  $T_1$  быстрого движения, получим уравнение для  $\bar{x}$ :

$$m \ddot{\bar{x}} = F_0(\bar{x}) + \varepsilon F_1(\bar{x}) \overline{\xi \sin \omega_1 t},$$

правая часть которого содержит слагаемое, пропорциональное возмущению. Соответственно, для быстрой переменной получаем линейное уравнение

$$m \ddot{\xi} = F_0'(\bar{x}) \xi + \varepsilon F_1(\bar{x}) \sin \omega_1 t + \varepsilon F_1'(\bar{x}) (\xi \sin \omega_1 t - \overline{\xi \sin \omega_1 t}).$$

В предположении, что сила, действующая на точку, слабо меняется на характерной длине (амплитуде) быстрых колебаний, т.е.

$$(F'_0 + F'_1(\bar{x}))\xi \ll F_1(\bar{x}),$$

получим решение для  $\xi$ :

$$\xi(t) = -\frac{1}{\omega_1^2} \frac{\varepsilon F_1}{m} \sin \omega_1 t,$$

что приводит к уравнению для медленной переменной  $\bar{x}$ :

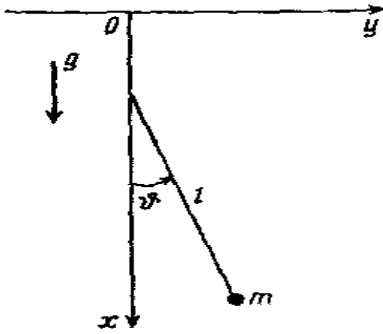
$$m\ddot{\bar{x}} = F_0(\bar{x}) - \frac{F_1 F_1'}{2m\omega_1^2}.$$

Так как уравнение для усредненного движения не зависит явно от времени, можно построить эффективную потенциальную энергию

$$U_{\text{эфф}}(\bar{x}) = U_0 + \frac{F_1^2(x)}{4m\omega_1^2},$$

которая содержит вклад от быстро осциллирующей части сил, действующих на точку. Заметим, что уравнение для усредненного движения и эффективная потенциальная энергия не зависят от закона, по которому происходит колебание силы  $F_1$ .

В качестве примера применения метода усреднения Капицы рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания в поле тяжести по закону  $x_0 = A \cos \omega t$  (рис. 1.16).



Периодическое воздействие на систему здесь осуществляется с помощью нестационарной связи –  $|\vec{r} - \vec{r}_0(t)| = l$ . Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mlA\omega^2 \cos \omega t \cos \varphi + mgl \cos \varphi,$$

что приводит к уравнению движения

$$\ddot{\varphi} = -\Omega^2 \sin \varphi - a\omega^2 \sin \varphi \cos \omega t,$$

где  $\Omega^2 = g/l$  и введен безразмерный параметр  $a = A/l$ . Действие нестационарной связи приводит к обобщенной силе, гармонически зависящей от времени, т. е. к случаю, рассмотренному выше. Эффективная потенциальная энергия усредненного движения имеет вид

$$U_{\text{эфф}}(\varphi) = mgl(-\cos \varphi + k^2 \sin \varphi),$$

где  $k = a\omega/2\Omega$  – параметр задачи. При  $k < 1/\sqrt{2}$  нижнее положение равновесия  $\varphi_0 = 0$  является устойчивым, а  $\varphi_{1,2} = \pm\pi$  – неустойчивым. При увеличении частоты колебаний подвеса параметр растет, и при  $k > 1/\sqrt{2}$  верхнее положение равновесия также оказывается устойчивым. Появляются две неустойчивые точки равновесия, определяемые условием  $\cos \varphi_{3,4} = -1/2k^2$ .

Зависимость эффективной потенциальной энергии усредненного движения от  $\varphi$  для случая  $k > 1/\sqrt{2}$  приведена на рис. 2.16.

Разделение движений на быстрые и медленные эффективно при изучении колебаний слабонелинейных систем. Пусть некоторая нелинейная система, например математический маятник, испытывает малые колебания. Тогда с высокой точностью движение является гармоническим:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \psi_0).$$

По мере роста амплитуды колебаний маятника происходят

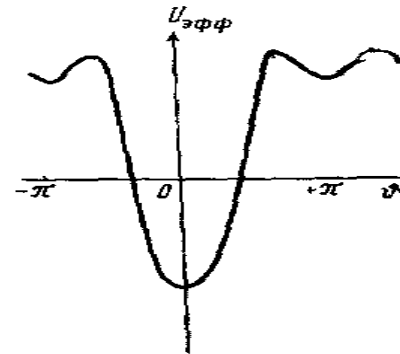


Рис. 2.16

два процесса. Во-первых, меняется период, а значит, и основная частота колебаний, а, во-вторых, форма колебаний начинает все заметнее отличаться от гармонической, т. е. спектр колебаний обогащается гармониками основной частоты:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\psi + b_n \cos n\psi),$$

где  $\psi = \omega t + \psi_0$  – фаза колебаний, причем  $\dot{\psi} = \omega \neq \omega_0$ .

Представление движения в виде ряда можно рассматривать как некоторую реализацию метода разделения движений на медленное, происходящее с основной частотой  $\omega$ , и быстрое, представляемое суммой ряда при  $n \geq 2$ :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \xi(t),$$

$$\xi(t) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \sin n\psi + b_n \cos n\psi).$$

В случае разложения движения в ряд Фурье метод разделения движений приобретает точный математический смысл, а именно решение, описывающее медленное движение  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t)$ , ортогонально быстрому:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \bar{\varphi}(t) \xi(t) dt = 0. \quad (3.16)$$

Это условие позволяет построить процедуру последовательного приближения для вычисления коэффициентов разложения в ряд и определения основной частоты колебаний. Указанный принцип последовательного разложения движения в виде разложения в ряд Фурье лежит в основе многих методов приближенного решения уравнений нелинейных колебаний, в частности таких, как метод гармонического баланса, и такого мощного метода, как метод Крылова – Боголюбова.

Рассмотрим вначале основные идеи на примере метода гармонического баланса, удобного для описания стационарных колебаний в слабонелинейных системах. Рассмотрим вначале консервативную систему, так что уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\bar{x}} = F(x).$$

Представим решение этого уравнения в виде  $x = \bar{x} + \xi$ . Подставляя это выражение в уравнение (3.16) и, учитывая, что при малых  $\xi$  можно ограничиться первым членом разложения по  $\xi$  правой части уравнения, получим уравнение для разделенного движения в виде

$$\ddot{\bar{x}} + \ddot{\xi} = F_0(\bar{x}) + F_1(\bar{x})\xi.$$

В отличие от рассмотренного ранее случая прямого разделения движения мы не можем непосредственно определить зависимость  $\xi = \xi(t)$ . Для выделения медленной части разложим правую часть уравнения в ряд Фурье, полагая, что зависимость медленной координаты  $x$  от фазы имеет вид  $\bar{x} = x_0 \sin \psi$ .

$$F_0(x_0 \sin \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(x_0) \sin n\psi + B_n(x_0) \cos n\psi),$$

и ограничимся нулевым порядком разложения по  $\xi$ . В этом приближении уравнение для медленной части  $x = x_0 \sin \psi$

$$-\omega^2 x_0 = A_1(x_0)$$

позволяет определить зависимость частоты колебаний от амплитуды

$$\omega^2(x_0) = -\frac{A_1(x_0)}{x_0}.$$

При определении коэффициентов Фурье мы воспользовались произвольностью выбора начальной фазы  $\psi_0$ , чтобы обратить  $B_1$ , в нуль. Подставляя найденное решение в уравнение (4.16), мы можем найти уравнение для определения быстрого движения:

$$\ddot{\xi} = F_1(\bar{x})\xi + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(x_0) \sin n\psi + B_n(x_0) \cos n\psi). \quad (5.16)$$

Заметим, что решение этого уравнения не будет ортогональным к  $\bar{x}$ , поскольку входящее в правую часть уравнения произведение  $F_1(x)\xi$  может содержать члены, пропорциональные  $\bar{x}$ . Для получения решения необходимо на каждом шаге выделять быстрые и медленные части решения, что приводит нас к процедуре последовательного приближения. Полагая, что  $\xi \ll 1$ , и членом, пропорциональным  $\xi$ , можно пренебречь, из уравнений найдем выражение для  $\xi$ :

$$\xi(t) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} (A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi).$$

Для уравнения математического маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

зависимость функции  $F$  от фазы  $\psi$  имеет вид

$$F(\bar{x}) = -\omega_0^2 \sin(x_0 \sin \psi),$$

так что коэффициент  $A_1$ , имеет вид

$$A_1 = -\frac{\omega_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin(x_0 \sin \psi) d\psi = -2J_1(x_0)\omega_0^2,$$

где  $J_1(x_0)$  – функция Бесселя.

Напомним, что эта функция может быть определена с помощью ряда

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Для колебаний, происходящих с малой амплитудой  $x_0 \ll 1$ , можно ограничиться первыми членами ряда

$$J_1(x_0) \approx \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{x_0^2}{8}\right),$$

что дает зависимость частоты малых колебаний от амплитуды:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{8}}.$$

Этот же результат может быть получен и непосредственно из уравнения (4.16), учитывая, что для малых колебаний можно ограничиться разложением

$$\sin \bar{x} = \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{6},$$

и, подставляя  $\bar{x} = x_0 \sin \psi$ , получить

$$F_0(\bar{x}) = -\omega_0^2 x_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{8}\right) \sin \psi - \frac{3}{8} \omega_0^2 x_0^3 \sin 3\psi.$$

Из этого выражения следует, что основная частота малых колебаний математического маятника, колеблющегося с амплитудой  $x_0$ , определяется выражением

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{16}\right).$$

### 16.3 Резонанс в нелинейной системе

Вынужденные колебания нелинейной динамической системы имеют ряд отличий от колебаний линейного осциллятора. Для простоты ограничимся рассмотрением систем с одной степенью свободы и будем рассматривать такие модели, в которых нелинейные эффекты малы. Это позволит легко сравнивать такие системы с линейными, движение которых изучалось в главе 8. Напомним, что колебания консервативной одномерной системы называются линейными, если их период не зависит от начальных условий. Как было показано в разделе 15.3, для такой системы всегда можно выбрать обобщенную координату  $x$  так, что динамическое уравнение будет линейным:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение этого уравнения – гармонические колебания:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6.16)$$

Внешнее периодическое воздействие на линейную систему без диссипации, описываемую уравнением вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega t + \beta), \quad (7.16)$$

приводит к закону движения (68.8), представляющему суперпозицию собственных и вынужденных колебаний. При  $\Omega \neq \omega_0$  решение уравнения (7.16) имеет вид

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + B \sin(\Omega t + \beta), \quad (8.16)$$

где  $B = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$  - амплитуда вынужденных колебаний осциллятора.

При  $\Omega = \omega_0$  закон движения иной:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{f_0}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Второе слагаемое в этом выражении часто рассматривается как «гармонические колебания с изменяющейся амплитудой». При  $f_0/\omega_0 \ll 1$  такая интерпретация соответствует разделению движения на быстрое и медленное. Однако, в отличие от ранее рассмотренных случаев здесь решение представляется не в виде суммы, а в виде произведения быстрого и медленного движений  $x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Если частота вынуждающей силы  $\Omega$  близка к частоте собственных колебаний  $\omega_0$ , то движение осциллятора (8.16) также удобно бывает представлять, как колебания с медленно меняющейся амплитудой  $A(t)$  и частотой, близкой к резонансной. Такие колебания называются биениями (см. гл. 8.4). Вводя обозначения  $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi$  для фазы собственных колебаний осциллятора и  $\vartheta(t) = \psi(t) - (\Omega t + \beta)$  для разности фаз собственных и вынужденных колебаний, закон движения можно записать в виде:

$$x(t) = A(t) \sin(\psi - \alpha(t)), \quad (9.16)$$

где  $A(t) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \vartheta}$ ,  $\alpha(t) = \arctg \frac{B \sin \vartheta}{A + B \cos \vartheta}$  - медленно меняющиеся величины.

В частном случае слабых биений, когда амплитуда вынужденных колебаний много меньше амплитуды собственных  $\varepsilon = B/A \ll 1$ , в выражении для амплитуды и фазы можно оставить только линейные по  $\varepsilon$  члены:

$$A(t) = A(1 + \varepsilon \cos \vartheta), \quad \alpha(t) = \varepsilon \sin \vartheta.$$

Закон движения в этом случае имеет вид:

$$x(t) = A(1 + \varepsilon \cos \vartheta) \cdot \sin(\psi - \varepsilon \sin \vartheta). \quad (10.16)$$

Амплитуда и фаза колебаний линейного осциллятора совершают гармонические колебания относительно значений, характеризующих собственные колебания, с частотой, равной отклонению от частоты вынужденных колебаний  $\Delta\Omega = \dot{\vartheta} = \omega_0 - \Omega$ . Амплитуда фазовых колебаний  $\varepsilon$  зависит как от величины внешнего воздействия  $f_0$ , так и от частоты  $\Delta\Omega$ :

$$\varepsilon \approx f_0 / 2A\Delta\Omega\omega_0.$$

Такова «кинематическая» интерпретация воздействия вынуждающей силы на систему без диссипации. Динамическое описание воздействия на систему удобно интерпретировать в терминах изменения полной энергии (40.2) осциллятора:

$$\dot{E} = W,$$

где  $W = f(t)\dot{x}(t)$  - мощность вынуждающей силы.

В зависимости от соотношения между фазой колебаний вынуждающей силы и скорости внешнее воздействие может либо увеличивать, либо уменьшать энергию осциллятора.

Для закона движения (8.16) полная энергия осциллятора имеет вид

$$E_0 = \frac{m}{2} \omega_0^2 (A^2 + 2AB \cos \vartheta + B^2) \{1 + O(\Delta\Omega/\omega_0)\}$$

В случае слабых биений (10.16) выражение для полной энергии можно записать в виде:

$$E_0 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2(t), \quad A(t) = A(1 + \varepsilon \cos \vartheta) \quad (10.17)$$

Амплитуда колебаний, по определению, является некоторой усредненной за достаточно большой промежуток времени характеристикой. Пренебрегая быстрыми изменениями энергии, получим

$$\dot{E} \approx \dot{E}_0 = \bar{W} = -\frac{m}{2} \omega_0 f_0 A \sin \vartheta. \quad (10.18)$$

Отсюда следует, что линейное с течением времени изменение разности фаз между вынуждающей силой и скоростью  $\vartheta(t) = (\omega_0 - \Omega)t + \vartheta_0$  и вызывает периодическое изменение энергии. В случае  $\Delta\Omega = 0$  биения отсутствуют, а амплитуда колебаний изменяется по линейному закону.

Аналогичные явления существуют и в нелинейной системе. Напомним, что свободный осциллятор называется нелинейным, если период его колебаний зависит от начальных условий (начальной энергии). Как отмечалось в 14.3, для нелинейного осциллятора всегда можно выбрать обобщенную координату так, что уравнение движения (при фиксированных начальных условиях) будет линейным, а колебания - гармоническими:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(t) = A \sin(\omega t + \psi_0). \quad (10.19)$$

Однако, и частота колебаний  $\omega$ , и сам выбор такой координаты зависят от начальных условий. При их изменении уравнение (в выбранных переменных) станет нелинейным, а колебания - ангармоническими.

#### Слабонелинейная система

Назовем консервативную систему слабо нелинейной, если колебания в ней близки к гармоническим и их частота слабо зависит от амплитуды - параметра, определяемого начальными условиями. Уточним это определение, рассматривая осциллятор, колебания которого происходят с амплитудой  $A_0$  и имеют период  $T_0 = T(A_0)$ . Предположим, что основная частота колебаний  $\omega = 2\pi/T = \omega(A)$  зависит от амплитуды так, что эту зависимость можно аппроксимировать равенством:

$$\psi = \omega(A) = \omega(A_0) + \frac{\partial \omega}{\partial A} (A - A_0) = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \omega}{\partial A} a \right), \quad (10.20)$$

где  $a = (A - A_0)$  — отклонение амплитуды от исходного значения при изменении начальных условий, и введено обозначение  $\omega(A_0) = \omega_0$ . Будем полагать, что выполняется условие:

$$\frac{\partial \omega}{\partial A} \frac{a}{\omega_0} \ll 1,$$

которое назовем условием слабой нелинейности.

Например, для математического маятника, совершающего достаточно малые колебания,  $\omega(A_0) = \omega_0 \left( 1 - A_0^2/16 \right)$ , так что  $\psi = \omega_0 \left( 1 - aA/8 \right)$ .

Действие вынуждающей силы на систему увеличивает или уменьшает амплитуду колебаний в зависимости от соотношения фаз, как и в линейном случае. Однако, в отличие от линейной системы, изменение амплитуды колебаний приведет к изменению их периода. Это изменит фазовые соотношения между вынуждающей силой и скоростью, что нарушит условия обмена энергией. В системе возникнут биения даже в случае  $\omega_0 = \Omega$ . Применяя теорему об изменении полной энергии системы в форме (10.18), получим:

$$\dot{E} \approx m \omega_0^2 A_0 \dot{a} = \bar{W}.$$

При вычислении мощности внешней силы скорость осциллятора можно определить приближенным выражением:  $\dot{x}(t) = A_0 \omega_0 \cos \psi$ , так что  $\bar{W} = -\frac{m}{2} \omega_0 f_0 A_0 \sin \vartheta$ . Таким образом, теорема об изменении энергии приводит к дифференциальному уравнению  $\dot{a} = -f_0 \sin \vartheta / 2\omega_0$ . Вместе с уравнением (10.20), в котором для простоты положим  $\omega_0 = \Omega$ , это уравнение составляет систему

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{f_0}{2\Omega} \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial \omega}{\partial A} a \end{cases}.$$

Полученная система уравнений эквивалентна уравнению второго порядка для фазовых колебаний:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{f_0}{2\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial A} \sin \vartheta = 0, \quad (10.21)$$

совпадающего с уравнением движения математического маятника:

$$\ddot{\vartheta} + \Omega_0^2 \sin \vartheta = 0, \quad \text{где} \quad \Omega_0^2 = \frac{f_0}{2\Omega} \left| \frac{\partial \omega}{\partial A} \right|.$$

В зависимости от начальных условий решение этого уравнения  $\vartheta = \vartheta(t)$  может быть либо финитным, «колебательным», либо инфинитным – «вращательным». Максимальная амплитуда колебаний переменной  $\vartheta_{\max} = \pi$ , определяет сепаратрису, что соответствует выбору константы  $C = 2\Omega_0^2$  в первом интеграле уравнения (10.21)

$$\dot{\vartheta}^2 - 2\Omega_0^2 \cos \vartheta = C.$$

Это позволяет оценить максимальное отклонение частоты колебаний:

$$|\dot{\vartheta}_{\max}| = \left( \frac{2f_0 \partial \omega / \partial A}{\omega} \right)^{1/2}$$

и наибольшее изменение амплитуды:

$$|a_{\max}| = \left( \frac{2f_0}{\omega \partial \omega / \partial A} \right)^{1/2}.$$

Из приведенных соотношений следует, что рассматриваемое приближение не может переходить в линейное, поскольку при выводе уравнений мы предполагали выполнение неравенства

$$\frac{|a_{\max}|}{A_0} \sim \frac{1}{A_0} \left( \frac{f_0}{\omega \partial \omega / \partial A} \right)^{1/2} \ll 1,$$

а оно обязательно нарушается при переходе к линейным системам, для которых  $\partial \omega / \partial A \rightarrow 0$ . Данное приближение называется приближением умеренной нелинейности и широко используется в теории нелинейного резонанса, поскольку дает универсальную схему описания для большого класса систем.

При малой амплитуде фазовых колебаний,  $\theta \ll 1$ , характерное время процесса обмена энергией с внешней системой

$$\tau = 1/\Omega_0 \sim \left( \frac{\omega}{f_0 \partial \omega / \partial A} \right)^{1/2}.$$

Изменения амплитуды и фазы в этом случае происходят по гармоническому закону:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\Omega_0 t + \beta_0) \quad a(t) = a_0 \cos(\Omega_0 t + \beta_0).$$

#### *Существенно нелинейная система*

Описание вынужденных колебаний существенно нелинейной системы значительно сложнее. В этом случае мы рассматриваем такое изменение амплитуды колебаний, при котором период движения существенно изменяется. При этом пренебрегать ангармонизмом нельзя.

Рассмотрим один из подходов к описанию эволюции системы на примере вынужденных колебаний математического маятника, с амплитудой близкой к  $\pi$ , под действием вынуждающей силы с частотой  $\Omega \approx \omega_0$ . Пренебрегая затуханием, запишем динамическое уравнение:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_0 \cos(\Omega t + \beta_0),$$

где  $M(t) = M_0 \cos(\Omega t + \beta_0)$  - момент вынуждающей силы.

Если полная энергия  $E$  близка к сепаратрисному значению  $E_0 = mgl$ ,  $E = E_0 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll E_0$ , то период колебаний  $T = T(\varepsilon)$  определяется, в основном, временем, проведенным системой вблизи точек неустойчивого равновесия (22.14):

$$T(\varepsilon) = \frac{2}{\omega_0} \ln \left( 32 \frac{mgl}{\varepsilon} \right),$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  - параметр системы, и удовлетворяет условию  $T \gg 1/\omega_0$ .



Изменение энергии маятника под действием внешних сил определяется теоремой динамики:

$$\dot{E} = M(t)\dot{\varphi}(t).$$

Энергия маятника заметно меняется лишь в окрестности положения устойчивого равновесия  $\varphi \approx 0$ , когда его скорость достигает максимального значения. При колебаниях с большой амплитудой время прохождения этой области много меньше периода колебаний, поэтому можно представлять воздействие на маятник как своеобразный удар, при котором энергия изменяется скачком вблизи точки  $\varphi = 0$ . Это позволяет использовать для описания эволюции системы метод точечных отображений Пуанкаре, описанный в разделе 15.4.

Закон движения маятника в этой области, соответствующий начальным условиям  $\varphi(0) = 0$   $\dot{\varphi}(0) > 0$ , хорошо аппроксимируется аналитической зависимостью (18.14)

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(\operatorname{th}(\omega_0 t)),$$

а скорость в этом приближении дается выражением

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 t)}.$$

Изменение энергии маятника  $\Delta E = E_{n+1} - E_n$  за время перехода от левой точки поворота  $\varphi_1 = \varphi(t_1)$   $t_1 < 0$  до правой  $\varphi_2 = \varphi(t_2)$   $t_2 > 0$  определяется интегралом (Мельникова-Арнольда)

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}(t) dt \approx 2M_0 \int_{t_1}^{t_2} \cos(\Omega t + \beta_n) \frac{\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 t)} dt.$$

При вычислении интеграла можно перейти к пределу  $|t_{1,2}| \rightarrow \infty$ , поскольку скорость движения в окрестности точек поворота экспоненциально мала, и вкладом этих областей в интеграл можно пренебречь. Это позволяет представить интеграл с помощью элементарных функций:

$$\Delta E = 2M_0 \cos(\beta_n) \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\Omega}{\omega_0} \xi + \beta_n\right) \frac{d\xi}{\operatorname{ch} \xi} = \frac{2\pi M_0}{\operatorname{ch}(\pi\Omega/2\omega_0)} \cos(\beta_n).$$

Время движения до следующего «удара» внешней силы равно половине периода колебаний свободной системы с энергией  $E_{n+1} = E_0 - \varepsilon_{n+1}$ , приобретенной в результате взаимодействия:

$$T_{n+1} = \frac{1}{\omega_0} \ln\left(32 \frac{mgl}{\varepsilon_{n+1}}\right).$$

В момент прохождения точки  $\varphi = 0$  фаза колебаний внешней вынуждающей силы определяется выражением:

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Omega T_{n+1} = \beta_n + \frac{\Omega}{\omega_0} \ln\left(32 \frac{mgl}{\varepsilon_{n+1}}\right), \quad (10.22)$$

а скорость отличается лишь знаком.

Расчет результатов следующего воздействия вынуждающей силы можно провести с помощью полученных формул, заменив в них начальные значения энергии  $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_{n+1}$ , и фазового сдвига  $\beta_n \rightarrow \beta_{n+1}$ .

Чтобы учесть изменение знака скорости, введем дополнительный сдвиг фазы на  $\pi$  в формуле (10.22). Вводя вместо значений энергии  $E$  отклонения энергии от сепаратрисного значения  $\varepsilon = E - E_0$ , получим систему алгебраических уравнений, описывающих эволюцию маятника под действием вынуждающей силы в терминах отображения Пуанкаре:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{2\pi M_0}{\operatorname{ch}(\pi\Omega/2\omega_0)} \cos \beta_n \\ \beta_{n+1} = \beta_n + \frac{\Omega}{\omega_0} \ln(32mgl/\varepsilon_{n+1}) + \pi \end{cases}$$

Дальнейшее исследование поведения системы можно провести по стандартной схеме, изложенной в разделе 15.4, то есть определить положение неподвижных точек отображения (по энергии), а затем, вводя матрицу Якоби, исследовать устойчивость этих точек.

Матрица Якоби для маятника имеет вид:

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} 1 & p \sin \beta \\ -k & 1 - kp \sin \beta \end{vmatrix},$$

где введены обозначения

$$p = \frac{2\pi M_0}{\text{ch}(\pi\Omega/2\omega_0)}, \quad k = \frac{\Omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon - p \cos\beta}.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda(1 - kp \sin\beta/2) + 1 = 0$$

определяют собственные значения

$$\lambda_{1,2} = 1 - kp \sin\beta/2 \left(1 \pm \sqrt{1 - 4/kp \sin\beta}\right)$$

собственных векторов преобразования.

Действительные собственные значения, удовлетворяющие условию  $\lambda > 1$ , свидетельствуют о возникновении неустойчивости в системе. В окрестности неподвижных по энергии точек, удовлетворяющих условию  $|\sin\beta| = 1$ ,  $\cos\beta = 0$ , как показано в 15.4, возникновение глобальной неустойчивости происходит при  $kp > 4$ , что и дает один из критериев неустойчивости системы:

$$\frac{2\pi M_0}{\varepsilon \text{ch}(\pi\Omega/2\omega_0)} \frac{\Omega}{\omega_0} > 4.$$

При выполнении этого условия в системе возникает динамический хаос, поэтому содержательное описание эволюции системы за большой промежуток времени в терминах решения задачи Коши оказывается невозможным.

Очевидно, что при заданной величине внешнего воздействия всегда найдутся такие значения начальных условий, что энергия маятника будет удовлетворять условию неустойчивости. Для малых воздействий, удовлетворяющих нашим предположениям, такие точки фазовой плоскости располагаются вблизи сепаратрис невозмущенного маятника. Область фазовой плоскости математического маятника, занимаемая ими, называется стохастическим слоем.

#### *Диссипативная слабонелинейная система*

В системах с диссипативными силами возможно возникновение стационарных режимов, подобных установившимся вынужденным колебаниям линейного осциллятора. Рассмотрим стационарный режим в системе с сопротивлением, пропорциональным скорости. Уравнение движения для этого случая имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + F(x) = f_0 \sin(\Omega t + \alpha). \quad (10.23)$$

Приближенное решение в такой системе можно получить методом гармонического баланса. Предполагая, что свободные колебания в системе отсутствуют, будем искать решение в виде разложения Фурье по гармоникам вынуждающей силы:

$$x(t) = A \sin(\Omega t) + \sum_{n \geq 2} (A_n \sin n\Omega t + B_n \cos n\Omega t) = \bar{x} + \xi$$

Здесь мы выделили быстро осциллирующую часть  $\xi = \xi(t)$ .

Резонансные эффекты в нелинейной системе могут проявляться вблизи тех частот, которые кратны любой, не обязательно первой гармонике вынуждающей силы. Если для слабо нелинейной системы с малым затуханием период свободных колебаний характеризуется частотой  $\omega_0$ , то резонансные эффекты могут возникать при  $\Omega \approx \omega_0/n$ . Кроме того, возможно резонансное возбуждение колебаний на частотах  $\Omega \approx n\omega_0$  вследствие резонанса между высокой гармоникой фурье-разложения собственных колебаний и вынуждающей внешней силой. Колебания на субгармониках и гармониках высокой частоты очень сильно усложняют картину нелинейного резонанса и при некоторых условиях приводят к возникновению динамического хаоса в системах. Однако в рассматриваемом случае, когда нелинейности малы, мы ограничимся только случаем резонанса на основной частоте  $\Omega \approx \omega_0$ . Детальное изложение особенностей нелинейного резонанса для других случаев можно найти в специальной литературе.

Для основного резонанса коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $F(x)$  определяются следующими интегралами:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

Полагая, что движение происходит по закону  $\bar{x} = A \sin \psi$ , где  $\psi = \Omega t + \alpha$ , подставим это решение в уравнение (10.23). Приравнявая коэффициенты при  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$  в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений для определения амплитуды колебаний и сдвига фаз:

$$\begin{cases} -\Omega^2 A + a_1(A) = f_0 \cos \alpha \\ -2\lambda\Omega A + b_1(A) = f_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты  $A = A(\Omega)$ , называемая иногда амплитудной кривой, определяется уравнением

$$[\Omega^2 A - a_1(A)]^2 + [2\lambda\Omega A - b_1(A)]^2 = f_0^2,$$

а сдвиг фаз  $\alpha$  — из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\lambda\Omega A - b_1(A)}{\Omega^2 A - a_1(A)}$$

В частности, для случая слабонелинейных колебаний математического маятника, когда можно ограничиться приближением  $\sin x \approx x - x^3/6$ , коэффициенты Фурье равны:

$$a_1 = \omega_0^2 A(1 - A^2/8), \quad b_1 = 0,$$

откуда

$$[\Omega^2 - \omega_0^2(1 - A^2/8)]^2 + 4\lambda^2\Omega^2 = (f_0/A)^2.$$

В пределе малого затухания стационарный режим математического маятника возникает при сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия, так что зависимость

$$A = 2\sqrt{2(1 - \Omega^2/\omega_0^2)}$$

определяет «скелетную кривую» нелинейного резонанса.

При учете затухания амплитудная кривая  $A = A(\Omega)$  определяется из кубического уравнения относительно  $A^2$ , что не очень удобно для аналитического представления результатов. Однако поведение системы нетрудно исследовать, если заметить, что обратная зависимость  $\Omega^2 = \Omega^2(A^2)$  выражается биквадратным уравнением

$$\Omega^4 - 2[\omega_0^2(1 - A^2/8) - 2\lambda^2\Omega^2] + [\omega_0^4(1 - A^2/8)^2 - (f_0/A)^2] = 0.$$

Две ветви кривой нелинейного резонанса слева и справа от «скелетной кривой» определяются корнями уравнения

$$\Omega_{\pm}^2 = \omega_0^2(1 - A^2/8) - 2\lambda^2 \pm \sqrt{4\lambda^4 - 4\lambda^2\omega_0^2(1 - A^2/8) + (f_0/A)^2} \quad (10.24)$$

а положение вершины можно найти из условия обращения дискриминанта в нуль

$$(f_0/A)^2 - 4\lambda^2\omega_0^2(1 - A^2/8) + 4\lambda^4 = 0.$$

При  $\lambda \ll \omega_0$  и  $A \ll 1$  это дает  $A_0 = f_0/2\lambda\omega_0$ ,  $\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2(1 - A^2/8) - 2\lambda^2}$ .

Вид резонансной кривой для математического маятника приведен на рис. 3.16.

Характерной особенностью нелинейного резонанса является зависимость формы кривой от амплитуды вынуждающей силы. При достаточно слабом внешнем воздействии на систему резонансная кривая мало отличается от линейного случая. Однако с увеличением вынуждающей силы  $f_0$  при заданном значении затухания амплитуда колебаний растет, что приводит к увеличению наклона «скелетной кривой» вблизи максимума, и появлению перегиба на резонансной кривой под этим максимумом. При амплитуде внешнего воздействия, превышающей некоторое критическое значение, существует область частот, в которой каждому значению частоты вынуждающей силы соответствует два устойчивых состояния системы, имеющих различную амплитуду установившихся колебаний. Эти значения амплитуды на графике соответствуют верхней и нижней ветвям амплитудной кривой (с). При адиабатически медленном изменении частоты достаточно большой вынуждающей силы амплитуда колебаний маятника зависит от предыстории. Медленное увеличе-



резким, почти скачкообразным изменением при переходе с нижней ветви амплитудной кривой на верхнюю вблизи точки неустойчивости  $\Omega_1/\omega_0 \approx 0.9$ . При уменьшении частоты колебаний переход с верхней ветви на нижнюю также происходит скачком, но уже при частоте вынуждающей силы  $\Omega_2/\omega_0 \approx 0.8$ .

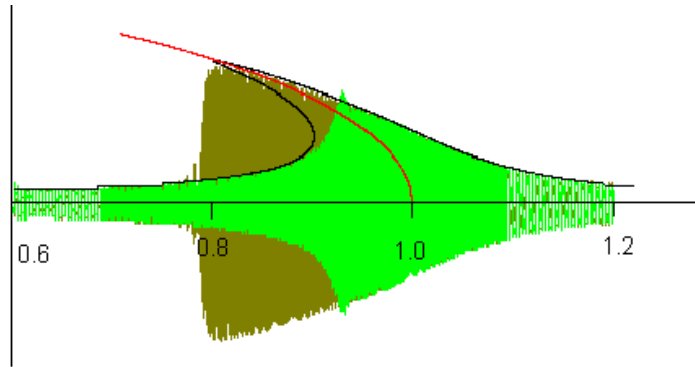


Рис. 4.16.

- 1 – скелетная кривая
- 2 – амплитудная кривая
- 3 – амплитуда колебаний при  $\dot{\Omega} > 0$
- 4 – амплитуда колебаний при  $\dot{\Omega} < 0$ .

Переходные процессы в системе не могут быть описаны в рамках рассматриваемого подхода. Некоторое представление о них дают рисунки 4.16а и 4.16б, на которых в увеличенном масштабе изображены колебания в рассматриваемой системе в окрестности неустойчивых точек  $\Omega \approx \Omega_{1,2}$ .

#### 16.4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Как отмечалось в п. 16.1, решение дифференциальных уравнений, зависящих от параметра  $\varepsilon$ , при выполнении условий теоремы существует и непрерывно зависит от параметра в некоторой области изменения переменных. Если функции  $f_i(x_k, t, \varepsilon)$  в правой части динамических уравнений (1.16) имеют непрерывные частные производные до  $n$ -го порядка включительно по всем переменным, то решение задачи в данной области также имеет непрерывные производные до  $n$ -го порядка. Более того, если функции  $f_i$  являются аналитическими функциями своих аргументов, то решение задачи аналитически зависит от параметров. Последнее утверждение является теоремой Пуанкаре.

Существование непрерывных производных по параметру возмущения позволяет разложить решение в ряд Маклорена по этому параметру:

$$x_i(t, \varepsilon) = x_i(t, 0) + \sum_{n=1}^k \frac{\partial^2 x_i}{\partial \varepsilon^n} \frac{\varepsilon^n}{n!} + o(\varepsilon^{n+1})$$

и представить решение в виде суммы

$$x_i(t, \varepsilon) = x_i(t, 0) + \xi_i(t, \varepsilon) = \bar{x}_i(t) + \xi_i,$$

где  $x_i(t, \varepsilon) \equiv \bar{x}_i(t)$  – решение невозмущенной задачи. Предполагается, что решение невозмущенной задачи известно. Очевидно, что решение  $\xi_i(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно стремится к нулю на сегменте  $[0, T]$ .

Пусть функции  $f_i$  являются аналитическими функциями всех аргументов, т. е. могут быть представлены в виде рядов по целым положительным степеням  $x_k, t$  и  $\varepsilon$ . Тогда решение представимо в виде ряда, равномерно сходящегося по  $\varepsilon$  в некоторой области. Для практического вычисления коэффициентов этого разложения можно использовать метод последовательных приближений Пуанкаре – фон Цайпеля. Для этого представим решение в виде формального ряда по переменной  $\varepsilon$  в уравнения и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях параметра возмущения.

Рассмотрим для определенности системы вида

$$\dot{x}_i = f_i^0(\bar{x}_k, t).$$

Пусть  $\bar{x}_i$  – решение невозмущенной задачи

$$\dot{\bar{x}}_i = f_i^0(\bar{x}_k, t).$$

Предположим, что функции  $f_i^1(x, t)$  являются аналитическими, и будем искать решение в виде ряда

$$x_i = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = f_i^0(\bar{x}, t), \\ \dot{\xi}_{1i} = f_{ik}^{\prime 0}(\bar{x}, t)\xi_{1k} + f_i^1(\bar{x}, t), \\ \dot{\xi}_{2i} = \frac{1}{2} f_{ik}^{\prime \prime 0}(\bar{x}, t)\xi_{2k} + f_{ik}^{\prime 1}(\bar{x}, t)\xi_{1k}(t), \\ \dots \end{cases}$$

Последовательное решение этой системы позволяет определить функции  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , решая неоднородные уравнения, например, методом вариации постоянных. Выбор начальных условий на каждом шаге интегрирования допускает определенную свободу. В рассматриваемых примерах мы полагаем все  $\xi_i(0)=0$  и  $\bar{x}_i(0) = x_{i0}$ .

В качестве примера применения метода рассмотрим колебания математического маятника достаточно малой амплитуды. В этом случае можно ограничиться первой нелинейной поправкой, полагая  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ . Полученное уравнение – уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3.$$

Пусть в начальный момент времени  $x(0)=a, \dot{x}(0)=0$ . Решение невозмущенной задачи в этом случае имеет вид

$$\bar{x} = a \cos \omega_0 t.$$

Подставим это решение в уравнение первого порядка по параметру возмущения:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = \varepsilon a^3 \cos^3 \omega_0 t.$$

Решение этого уравнения с начальными условиями  $\xi_1(0) = 0, \dot{\xi}_1(0) = 0$  имеет вид

$$\xi_1(t) = \frac{3}{8} \varepsilon a^3 (\omega_0 t \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t) - \frac{1}{32} a^3 \varepsilon \cos 3\omega_0 t.$$

Очевидно, что уже в первом порядке решение содержит слагаемые, которые расходятся при  $\omega_0 t \rightarrow \infty$ . Эти слагаемые называют вековыми или секулярными членами. Полученный ряд сходится при условии, что  $\omega_0 t < 1$ . В случае  $\omega_0 t > 1$  вопрос о сходимости ряда гораздо сложнее. Ряд, содержащий вековые члены, может быть сделан сходящимся при выборе достаточно малого возмущения на достаточно малом интервале времени.

Вообще говоря, при решении дифференциальных уравнений с помощью рядов часто ряды оказываются расходящимися. В качестве примера, взятого из монографии А. Найфа<sup>1\*</sup>, рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}.$$

Будем искать решение в области  $|x| \gg 1$ . Представим решение в виде формального ряда

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-m}$$

и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $m$ , получим

$$y(x) = \frac{1}{x} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{x^k} \right).$$

Из приведенного выражения следует, что при любых  $x$  ряд расходится. Однако конечное число членов ряда хорошо аппроксимирует решение при  $x < 0$ , которое можно представить в виде

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^x}{x} dx.$$

<sup>1</sup> См.: Н а й ф э А. Методы возмущений. М.: Мир. 1976.

Справедливость последнего утверждения легко проверить прямой подстановкой. Интегрирование по частям позволяет представить остаточный член ряда в виде интеграла

$$R_n(x) = n!e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^x}{x^{n+1}} dx.$$

При  $x < 0$  ряд является знакопеременным и остаточный член легко оценить:

$$|R_n| \leq n! \left| \frac{1}{x^{n+1}} \right| e^{-x} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{n!}{|x^{n+1}|}.$$

Поскольку остаточный член меньше последнего члена ряда, мы получили для всех  $x$  удобную оценку точности представления решения дифференциального уравнения конечным числом членов ряда.

Ряды, сходящиеся при всех  $t$  для некоторых фиксированных  $\varepsilon$ , называют равномерно-пригодными. Это свойство рядов теории возмущений может быть нарушено как особенностями динамических уравнений, так и неудачной формой представления решений. В последнем случае удастся указать процедуру устранения расходимости. Так, в рассмотренном выше примере решения уравнения Дуффинга для нелинейного осциллятора возникновение вековых членов обусловлено неудачным выбором частоты колебаний, поскольку частота возмущенного осциллятора не равна  $\omega_0$ . Устранение расходимости в этом случае может быть достигнуто при учете изменения частоты нелинейного осциллятора. Процедура перенормировки частоты в каждом приближении ряда Пуанкаре была предложена Линдстедтом. В этом случае предполагается, что зависимость частоты колебаний от возмущения может быть представлена рядом

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение движения и приравнявая члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$  для  $\xi_1$  получим уравнение

$$\xi_1'' + \xi_1 = \left( 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{1}{8} A^2 \right) A \cos \omega t + \frac{A^3}{24} \cos 3\omega t.$$

Здесь в качестве независимого аргумента выбрана фаза колебаний  $\psi = \omega t + \psi_0$ . Накладывая дополнительное условие периодичности возмущенного решения, легко определить поправку к частоте  $\omega_1$ , обеспечивающую обращение в нуль резонансного члена в правой части уравнения движения  $\omega = -\frac{1}{16} \omega_0 A^2$ .

Для нулевых начальных условий

$$\xi_1(0) = 0, \quad \dot{\xi}_1(0) = 0$$

Что дает поправку к закону движения:

$$\xi_1 = \frac{1}{192} A^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t).$$

Заметим, что получаемый таким способом ряд уже не является рядом по степеням параметра возмущения, поскольку  $\varepsilon$  входит в выражение для частоты колебаний. Процедура последовательного исключения резонансных членов путем определения поправок к частоте колебаний слабонелинейных систем была развита в методе Крылова – Боголюбова.

## 16.5. МЕТОД КРЫЛОВА – БОГОЛЮБОВА

Метод Крылова – Боголюбова является обобщением рассмотренных ранее методов построения асимптотических приближений для неконсервативных колебательных систем, в частности систем с диссипацией. Этот метод развивает идеи Линдстедта о разложении частоты колебаний в ряд по малому параметру и использует методику разделения движений на быстрые и медленные. Для разделения движений используется разложение в ряд Фурье по возмущенному движению, так что выделение медленного движения является хорошо определенной процедурой, и это позволяет контролировать точность асимптотического разложения. Для упрощения изложения основных идей метода мы ограничимся здесь рассмотрением автономных динамических систем. Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (8.16)$$

где  $\varepsilon$  – параметр возмущения. При  $\varepsilon=0$  решение этого уравнения – тригонометрические функции.

Если система является консервативной, то колебательное решение при  $\varepsilon \neq 0$  можно представить в виде тригонометрического ряда

$$x(t) = a \sin \psi + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin(n\psi + \theta_n),$$

коэффициенты которого определяются начальными условиями и, следовательно, могут быть выражены через амплитуду первой гармоники:

$$a_n = a_n(a), \quad \theta_n = \theta_n(a), \quad n \geq 2.$$

В общем случае диссипативные члены, входящие в уравнение (8.16), представлены в виде малого возмущения, пропорционального  $\varepsilon$ . Решение для такой системы естественно представлять в виде асимптотического ряда по параметру возмущения:

$$x(t) = a \sin \bar{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(a, \bar{\psi}), \quad (9.16)$$

где  $a = a(t)$  и  $\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t)$  – медленно меняющиеся функции.

Как и в случае консервативных систем, мы будем предполагать, что в этом выражении производится разделение движения на медленное и быстрое, так что первое слагаемое полностью описывает медленное движение. Математическим выражением этого факта является условие ортогональности первого слагаемого всем остальным членам ряда:

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi u_n(a, \psi) d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \psi u_n(a, \psi) d\psi = 0. \quad (10.16)$$

Это условие однозначно определяет процедуру построения решения. Уравнения для определения медленно меняющейся амплитуды и фазы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{a} = a + \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n(a). \end{cases} \quad (11.16)$$

Правые части уравнений (11.16) определяются из уравнения (8.16) путем подстановки решений, выраженных через введенные переменные  $a$  и  $\theta$ .

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , можно построить ряд (9.16). Построенный ряд является асимптотическим и обеспечивает точность  $\varepsilon^n$ , в том числе на больших временах движения системы при  $\omega t > \varepsilon$ .

Практически более удобным для получения асимптотического ряда (9.16) является метод усреднения, применяемый к точным уравнениям для введенных переменных –  $A(t)$ ,  $\psi(t)$  – амплитуды и фазы. Эти переменные вводятся с помощью соотношения

$$x = A(t) \sin \psi(t). \quad (12.16)$$

При  $\varepsilon=0$

$$\psi = \omega_0 t + \theta_0.$$

Если новые переменные подчинить дополнительному условию

$$\dot{A} \sin \psi + A \dot{\theta} \cos \psi = 0, \quad (13.16)$$

то выражение для производной  $\dot{x}(t)$  явно не будет содержать зависимости от производных  $A$  и  $\theta$ :

$$\dot{x}(t) = A \omega_0 \cos \psi. \quad (14.16)$$

В этом случае уравнение (8.16) вместе с (13.16) приводит к системе уравнений первого порядка для амплитуды и фазы:



$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \cos \psi, \\ \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{A \omega_0} f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \sin \psi. \end{cases} \quad (15.16)$$

Если рассматриваемые функции  $f(x, x)$  являются периодическими по переменной  $\psi$ , удобно представить их в виде рядов Фурье, коэффициенты которых зависят от амплитуды:

$$f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(A) \cos n\psi + h_n(A) \sin n\psi) + g_0(A).$$

Используя это представление, запишем уравнения (15.16):

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(A)(\cos(n-1)\psi + \cos(n+1)\psi) + h_n(A)(\sin(n-1)\psi + \sin(n+1)\psi)\}, \\ \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2A\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(A)(\sin(n+1)\psi - \sin(n-1)\psi) + h_n(A)(\cos(n-1)\psi - \cos(n+1)\psi)\}. \end{cases} \quad (16.16)$$

Амплитуду и фазу удобно представить в виде суммы медленно изменяющейся части и осциллирующих функций:

$$\begin{aligned} A(t) &= a(t) + a_1(t), \\ \theta(t) &= \bar{\theta}(t) + \theta_1(t). \end{aligned}$$

Поскольку амплитуда осцилляций мала:  $a_1(t) \sim \varepsilon a(t)$ , в первом порядке по  $\varepsilon$  уравнения для медленных функций можно получить из точных, усредняя их по времени за период. Эти уравнения можно получить из (16.16), оставляя в правой части лишь члены, не зависящие от фазы  $\psi$ .

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} g_1(a), \\ \dot{\bar{\theta}} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0} h_1(a). \end{cases}$$

Решение уравнений с учетом начальных условий  $a(0) = a_0$ ,  $\bar{\theta}(0) = \theta_0$ , дается следующими выражениями:

$$t = \frac{2\omega_0}{\varepsilon} \int_{a_0}^a \frac{da}{g_1(a)}, \quad \bar{\theta}(a) = \theta_0 - \int_{a_0}^a \frac{da}{a} \frac{h_1(a)}{g_1(a)}. \quad (17.16)$$

Осциллирующие члены  $a_1$  и  $\theta_1$  можно определить из уравнения (16.16), заменяя интегрирование по времени интегрированием по фазе, с учетом сделанных приближений:

$$g_n(A) \approx g_n(a), \quad h_n(A) \approx h_n(a).$$

Для представления решения уравнения (3.16) в форме Крылова – Боголюбова в первом порядке по  $\varepsilon$  подставим полученные выражения для амплитуды и фазы в (12.16):

$$x(t) = a \sin \bar{\psi} + \varepsilon u_1(a, \bar{\psi}), \quad (18.16)$$

где

$$\varepsilon u_1 = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1 - n^2}.$$

Приближения более высокого порядка по  $\varepsilon$  можно получить таким же путем, подставляя полученные выражения в правую часть (14.16) и вновь повторяя изложенную процедуру.

Метод Крылова – Боголюбова можно использовать для анализа движения математического маятника в среде с сопротивлением. Если момент сил сопротивления пропорционален скорости, то уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (19.16)$$

Здесь  $\varphi$  – угол отклонения от вертикали.

Возмущение в этом случае описывается функцией

$$\mathcal{E}f(\varphi, \dot{\varphi}) = \omega_0^2(\varphi - \sin \varphi) - 2\delta\dot{\varphi}.$$

Подставляя в это выражение  $\varphi = a \sin \psi$ ,  $\dot{\varphi} = a\omega_0 \cos \psi$  и раскладывая возмущение в ряд Фурье, для коэффициентов разложения получим

$$\begin{aligned} \varepsilon g_1(a) &= -2\delta a \omega_0, & \varepsilon h_1(a) &= \omega_0^2(a - 2J_1(a)), \\ \varepsilon h_n(a) &= -2\omega_0^2 J_n(a), \end{aligned}$$

где  $n=2k+1$ ,  $J_n(a)$  – функции Бесселя. Остальные коэффициенты равны нулю.

Уравнения (17.16) дают

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 e^{-\delta t}, \\ \theta(a) &= \theta_0 + \frac{\omega_0}{2\delta} \int_{a_0}^a da \frac{a - 2J_1(a)}{a^2}. \end{aligned}$$

Для  $a \ll 1$  поправка к фазе выражается через элементарные функции

$$\theta(a) = \theta_0 + \frac{1}{32\delta} \omega_0 (a^2 - a_0^2),$$

так что зависимость фазы от времени имеет вид

$$\bar{\psi}(t) = \omega_0 \left( t + \frac{a_0^2}{32\delta} (e^{-2\delta t} - 1) \right).$$

Закон движения в виде Крылова – Боголюбова в первом порядке по параметру возмущения представлен выражением

$$\varphi(t) = a_0 e^{-\delta t} \sin \bar{\psi} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(a)}{k(k+1)} \sin(2k+1)\bar{\psi}.$$

Более подробно этот метод и приведенный пример изложены в оригинальной литературе<sup>\*)</sup>.

## 16.6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ВКБ

Рассмотренные выше методы приближенного решения уравнений во многом основаны на разделении движений. Предполагается, что система в среднем движется медленно и при этом совершает быстрые колебания относительно усредненного движения. Если в задаче можно ограничиться линейным приближением для описания быстрых осцилляций, то уравнения для этих колебаний будут линейными дифференциальными уравнениями с коэффициентами, явно зависящими от времени. В общем случае решение таких уравнений очень сложно, но, используя различные временные масштабы, которые обычно имеются в задаче, решение можно упростить. Если коэффициенты линейного уравнения являются медленными функциями времени, то для построения решений удобно использовать метод Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна или сокращенно метод ВКБ. Развитие этого метода в основном связано с построением решений уравнений квантовой теории. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим простейшую модель – линейный осциллятор с частотой, явно зависящей от времени.

Уточним вначале понятия быстрого и медленного движений применительно к рассматриваемому случаю. Пусть  $\omega$  – частота колебаний, определяющая масштаб быстрых процессов, характерное время которых  $T = 2\pi/\omega$ . Медленные изменения характеризуются масштабом  $T_0$ , в течение которого частота быстрых колебаний существенно меняется, т. е.

$$\Delta\omega \approx \dot{\omega} T_0 \approx \omega.$$

Будем рассматривать системы, для которых выполняется условие

<sup>\*)</sup> См.; Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

$$\frac{T}{T_0} \sim \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \varepsilon \ll 1. \quad (20.16)$$

Такие системы мы будем называть системами с медленно изменяющимися параметрами.

Пусть линейный осциллятор, частота которого явно зависит от времени  $\omega = \omega(t)$ , удовлетворяет условию (20.16). Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (21.16)$$

Учитывая медленное изменение частоты, будем искать решение уравнения в виде

$$x(t) = A(t) \sin \psi(t).$$

где  $A(t)$  – медленно меняющаяся амплитуда, а фаза определяется выражением

$$\psi(t) = \int \omega(t) dt.$$

Поскольку рассматриваемое уравнение линейно, решение его удобно искать в комплексной форме, а затем выделить действительную часть. Отметим, что в классическом методе ВКБ амплитуда предполагается неизменной, а фаза представляется в виде ряда, слагаемые которого могут быть вычислены с помощью итераций. Мы будем следовать здесь несколько другой процедуре, изложенной в учебнике Н. Н. Моисеева « », предполагая фазу заданной, а медленно меняющуюся амплитуду будем считать подлежащей определению.

Рассмотрим замену переменных

$$x = A(t) e^{i \int \omega(t) dt}. \quad (22.16)$$

Подстановка решения в виде (22.16) в уравнение (21.16) дает для амплитуды линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{A} + 2i\omega\dot{A} + i\omega A = 0, \quad (23.16)$$

имеющего, как и исходное уравнение (21.16), два линейно независимых решения. В общем случае решение этого уравнения не проще исходного, однако его линейно независимые решения обладают замечательной особенностью – они характеризуются различными временными масштабами. Это позволяет легко организовать процедуру разделения движений. На временном интервале  $T \ll \tau \ll T_0$  можно считать, что  $\omega = \omega_0$ ,  $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$  являются некоторыми константами. В этом случае решение можно представить в виде

$$A(t) = A_0 e^{i\lambda t}$$

и построить характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2i\omega_0\lambda - i\dot{\omega}_0 = 0,$$

решение которого, соответствующее корню  $\lambda_1 = -2i\omega_0 \mp \omega_0\varepsilon$ , описывает быстрые движения, а  $\lambda_2 = \mp\omega_0\varepsilon/2$  – медленные процессы.

Для выделения медленной части заменим уравнение второго порядка (23.16) уравнением первого порядка, полученного отбрасыванием старшей производной:

$$2\omega\dot{a}_0 + \dot{\omega}a_0 = 0.$$

Представим амплитуду  $A$  в виде ряда

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t).$$

Члены ряда, начиная с  $n=1$ , можно получить с помощью итеративной процедуры, полагая, что они удовлетворяют неоднородным уравнениям первого порядка

$$2\omega\dot{a}_n + \dot{\omega}a_n = i\ddot{a}_{n-1},$$

правая часть которых определена предыдущей итерацией. В этом случае ряд определяет только медленно меняющуюся функцию.

Решения приведенных уравнений с учетом начального условия  $A(0) = A_0$ , имеют вид

$$a_0(t) = A_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega(t)}}, \quad a_n(t) = \frac{i}{2} a_0(t) \int_0^t \frac{dt}{\omega(t)} \frac{\ddot{a}_{n-1}(t)}{a_{n-1}(t)},$$

в частности первое приближение для рассматриваемой задачи дает

$$a_1(t) = \frac{i}{8} a_0(t) \int_0^t dt \frac{3\dot{\omega}^2 - 2\omega\dot{\omega}}{\omega^3}.$$

Эти приближения пригодны для всех  $\omega$ , удовлетворяющих условию  $0 < a \ll \omega(t)$ .

В качестве примера применения метода ВКБ рассмотрим малые колебания математического маятника, длина которого линейно увеличивается:

$$l(t) = l_0 + v_0 t.$$

Изменение длины приводит к медленному росту амплитуды. В нулевом приближении этот рост описывается формулой

$$a_0(t) = A_0 \sqrt{1 + v_0 t / l_0}.$$

Если одномерный осциллятор описывается функцией Гамильтона

$$\mathbf{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2},$$

где  $\omega(t)$  – медленно меняющийся параметр, адиабатический инвариант системы

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{\mathbf{H}}{\omega}$$

сохраняется (приближенно).

Подставляя значение амплитуды, полученной с помощью ВКБ приближения, найдем зависимость функции Гамильтона от времени:

$$\mathbf{H}(t) = \frac{m\omega(t)\omega_0 A_0^2}{2},$$

где  $\omega(0) = \omega_0$ . Отсюда следует, что  $I = m\omega_0 A_0^2 / 2 = \text{const}$ .

Таким образом, нулевое приближение ВКБ соответствует сохранению инварианта. Использование высших приближений метода ВКБ позволяет оценить точность сохранения адиабатического инварианта.

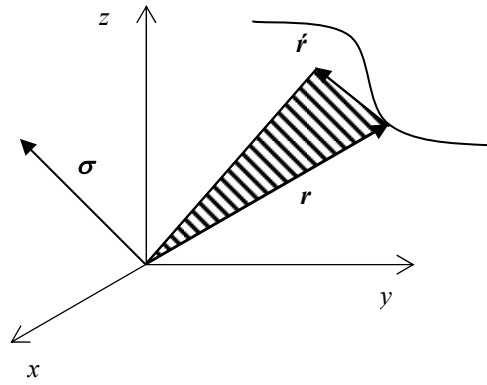


Рис 1.1

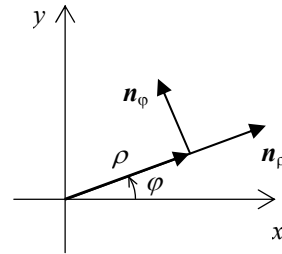
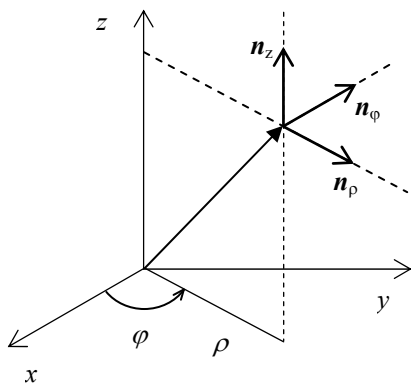


Рис. 2.1

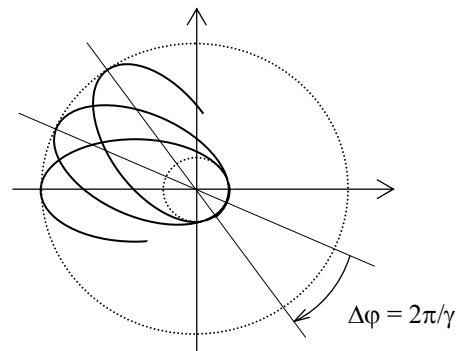
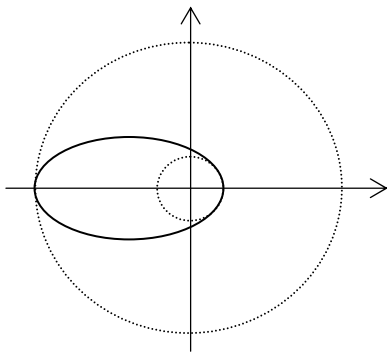


Рис. 3.1

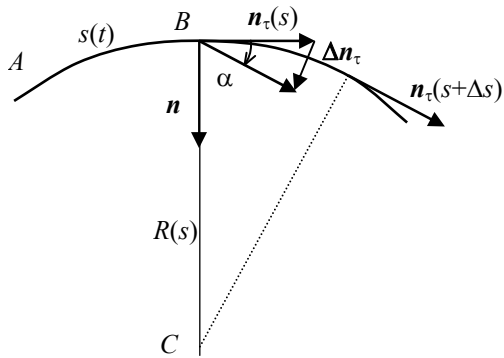


Рис. 4.1

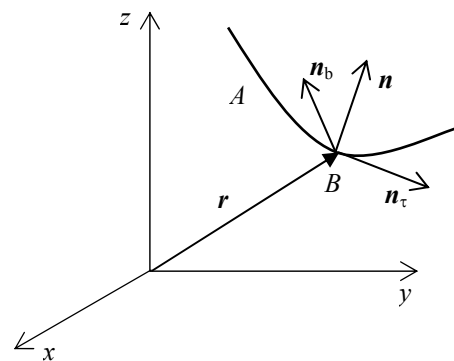


Рис. 5.1

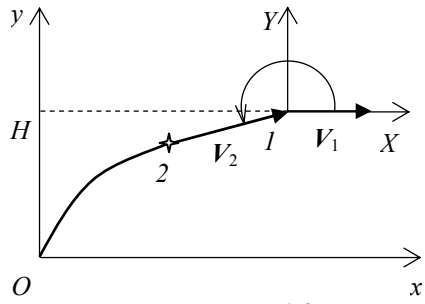


Рис 1.2

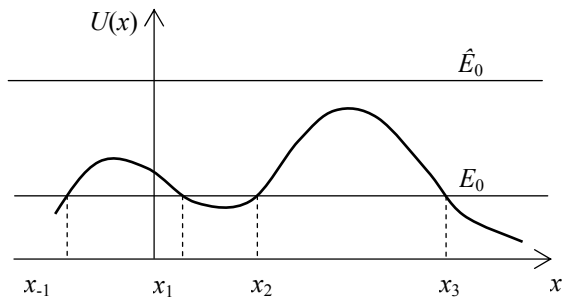


Рис 1.3

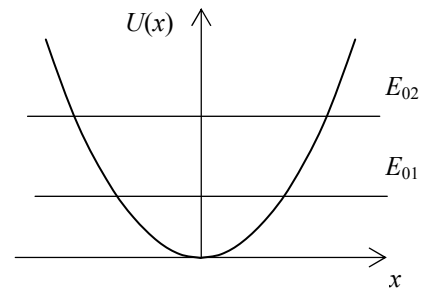


Рис 2.3

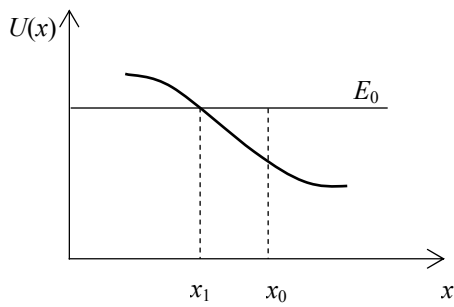


Рис. 3.3

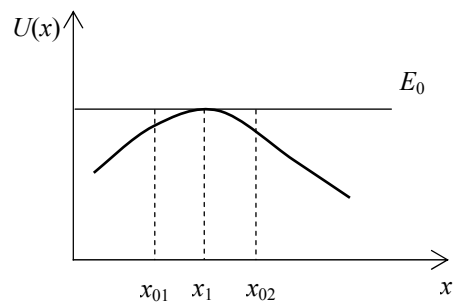


Рис. 4.3

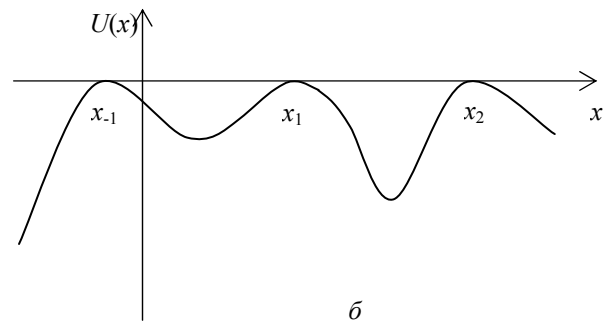
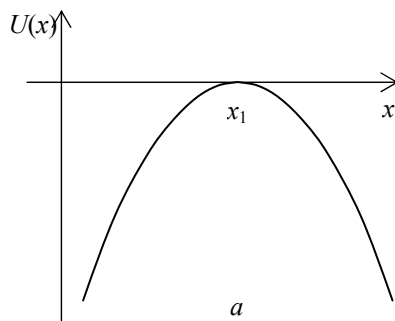


Рис. 5.3

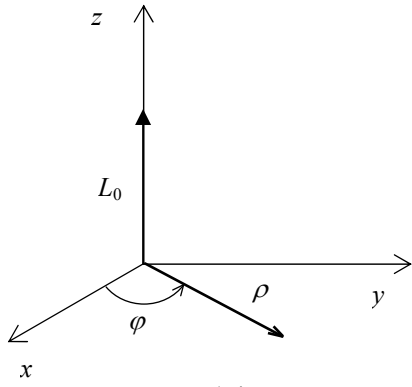


Рис. 1.4

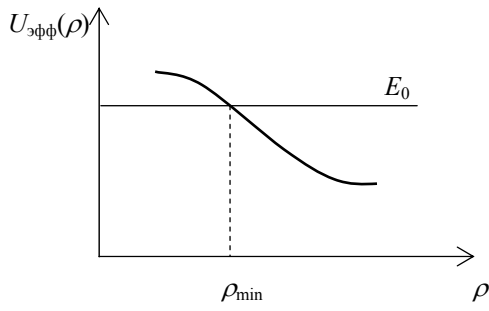


Рис. 2.4

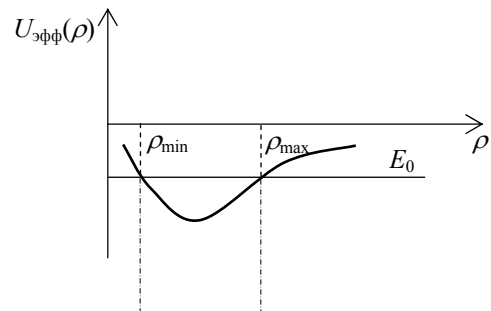


Рис. 3.4

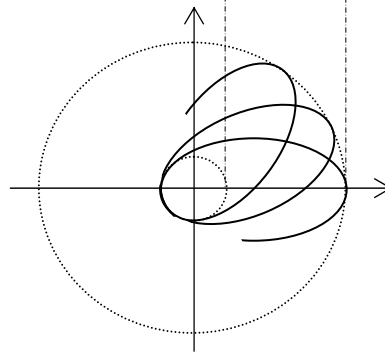


Рис. 4.4

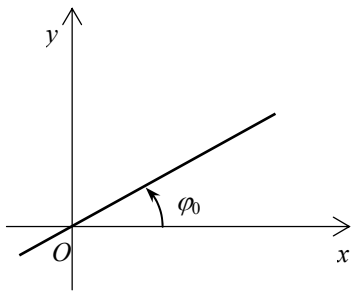


Рис 5.4

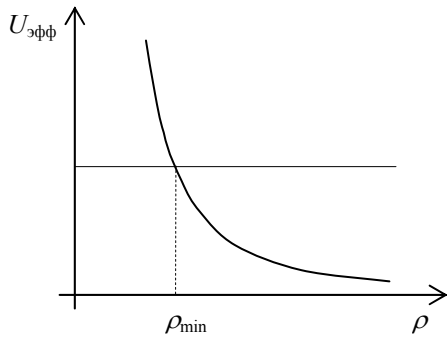


Рис. 6.4

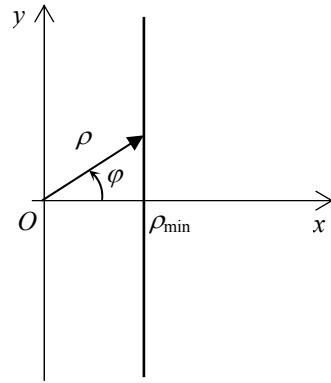


Рис. 7.4

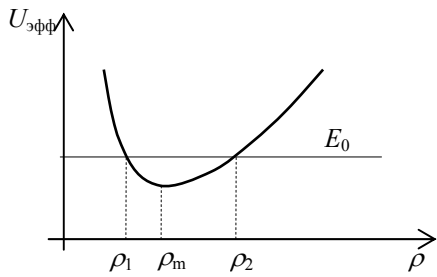


Рис. 8.4

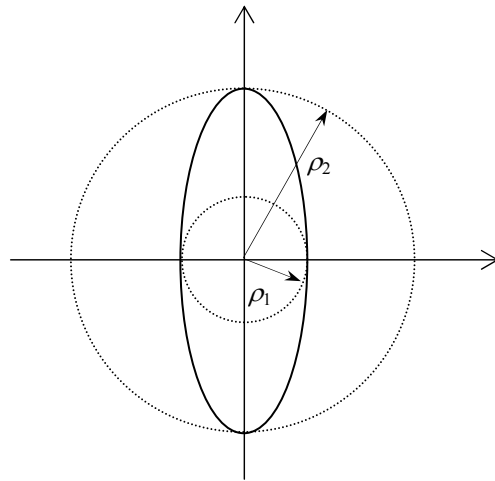


Рис. 9.4

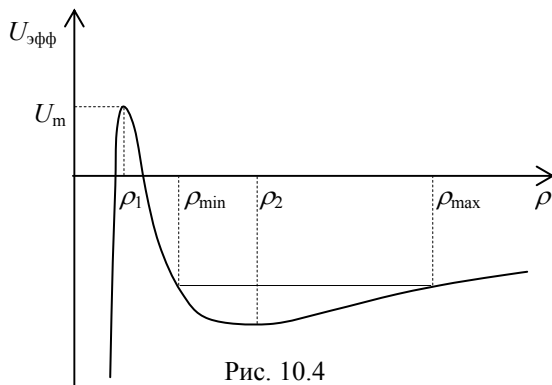


Рис. 10.4

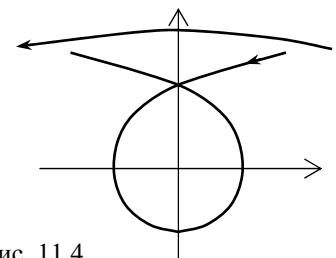


Рис. 11.4

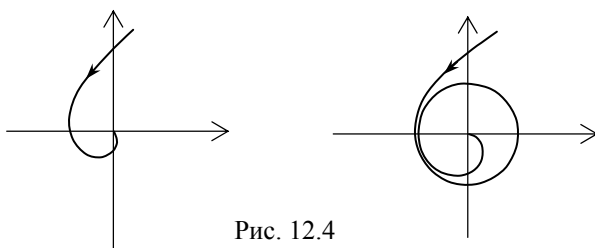


Рис. 12.4

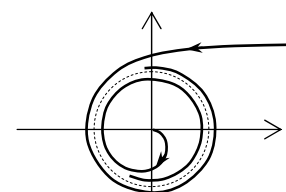


Рис. 13.4



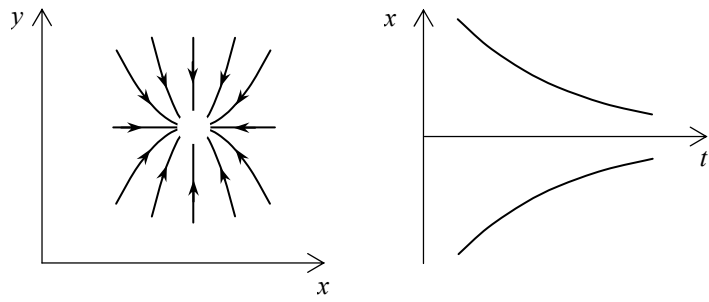


Рис. 14.4

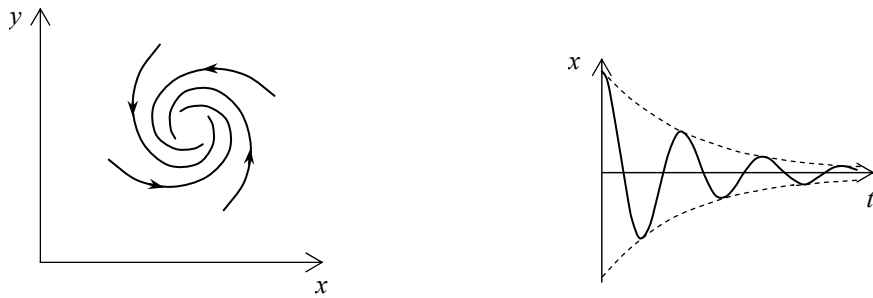


Рис. 15.4

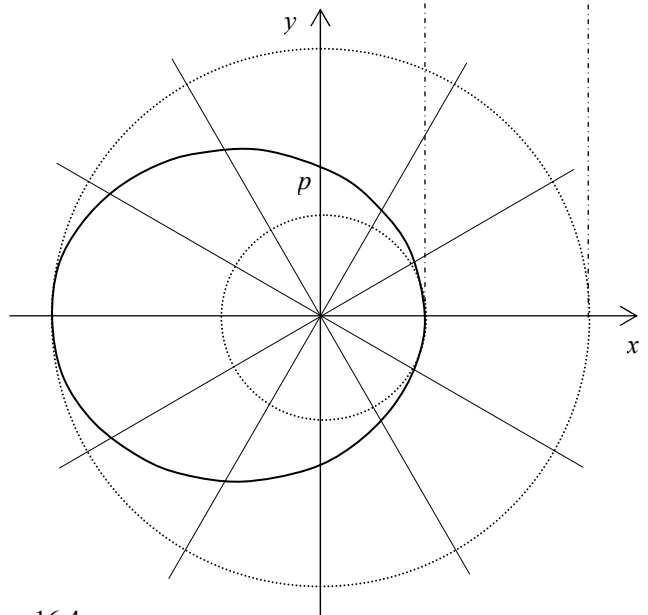
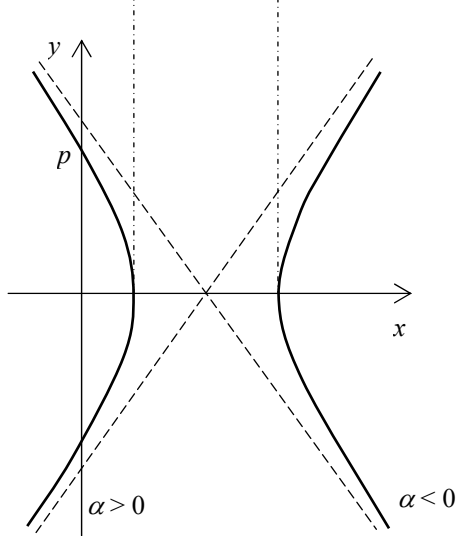
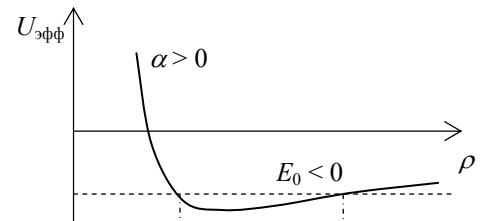
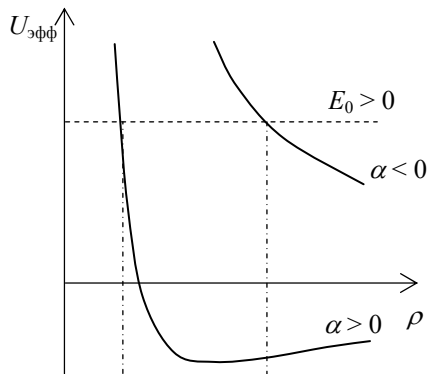


Рис. 16.4

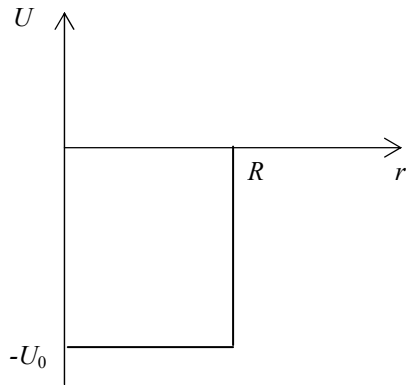


Рис. 17.4

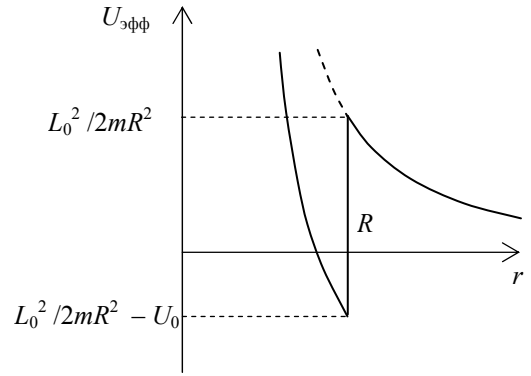


Рис. 18.4

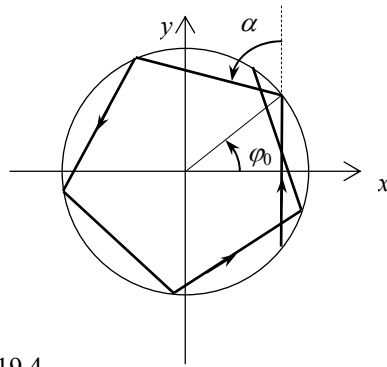


Рис. 19.4

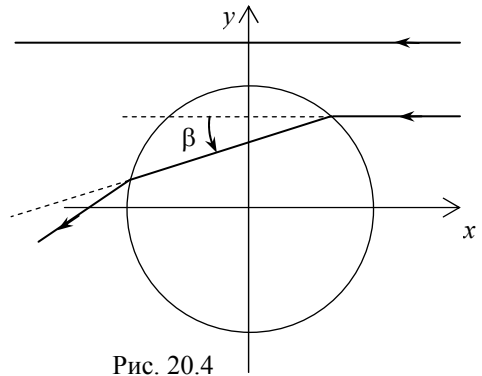


Рис. 20.4

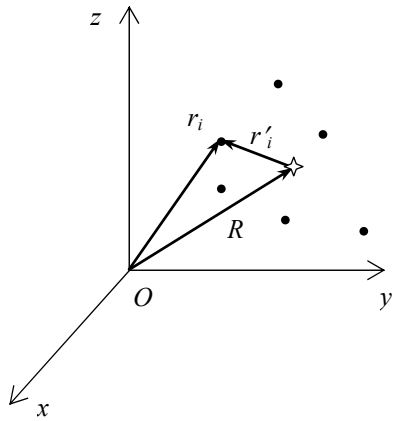


Рис. 1.5

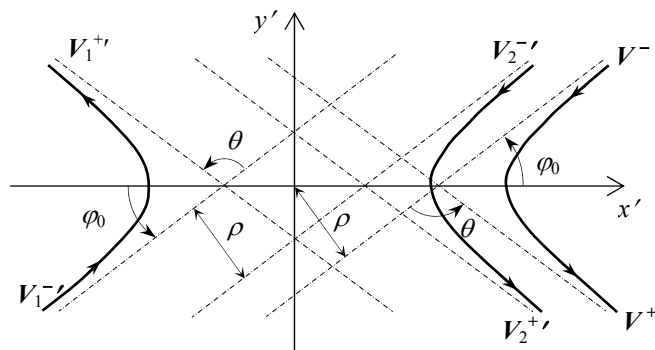
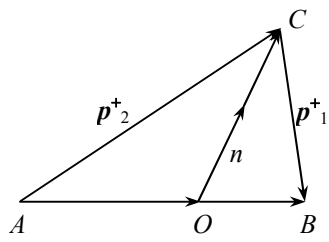


Рис. 1.6



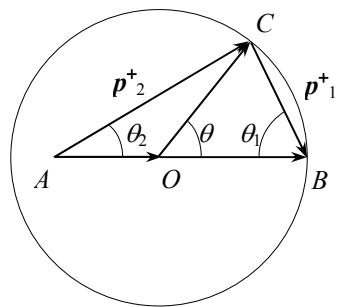
$$OC = \mu V_-$$

$$AO = \frac{m_2}{m} (p_1^- + p_2^-)$$

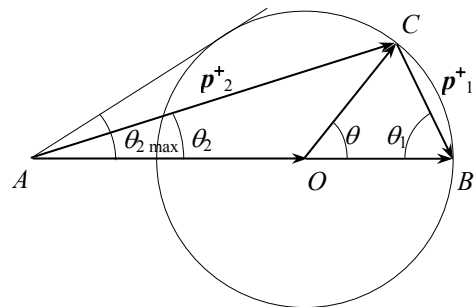
$$OB = \frac{m_1}{m} (p_1^- + p_2^-)$$

$$AC = p_2^+, \quad CB = p_1^+$$

Рис. 2.6



а)  $m_1 > m_2$



б)  $m_1 < m_2$

Рис. 3.6

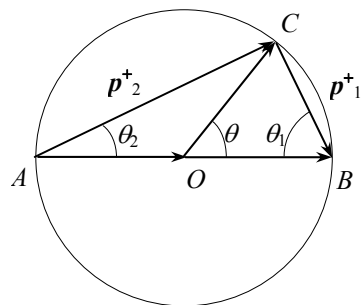


Рис. 4.6

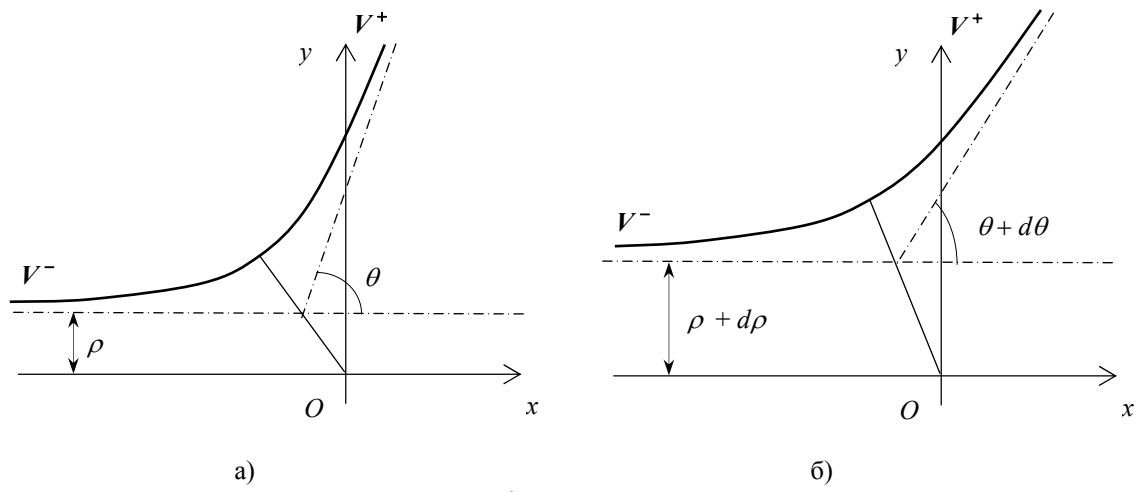


Рис. 5.6

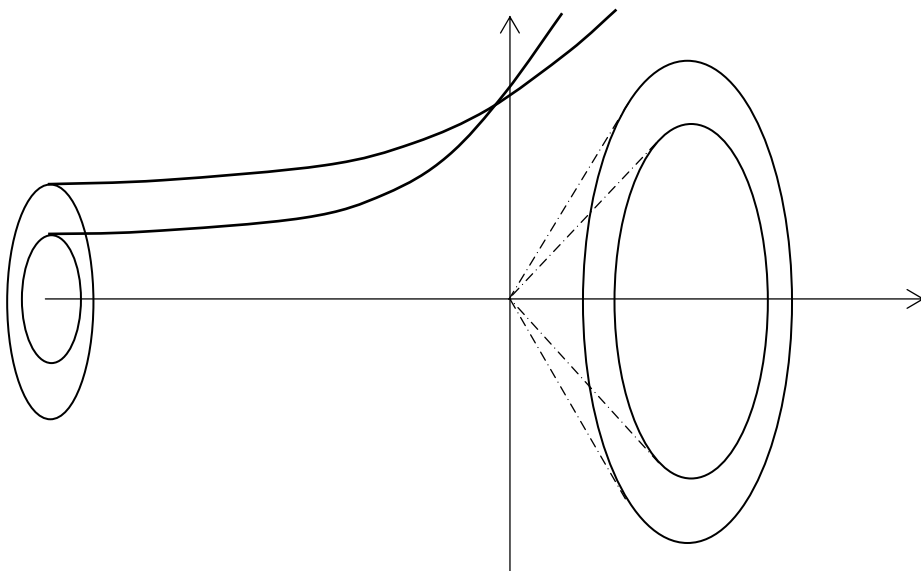


Рис. 6.6

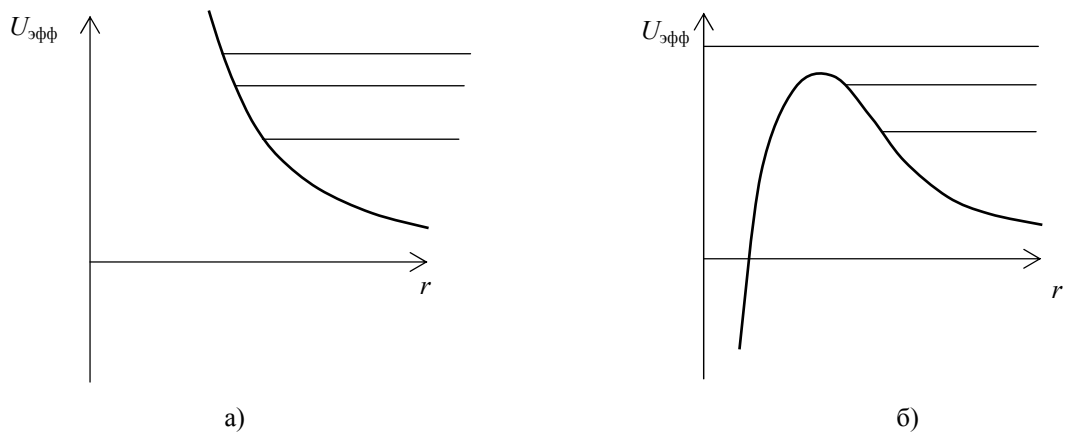


Рис. 7.6

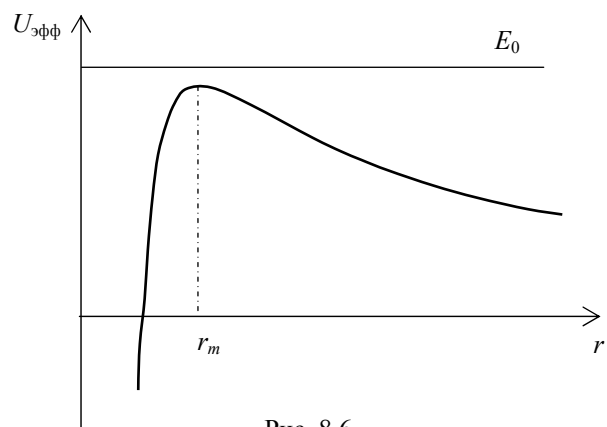


Рис. 8.6

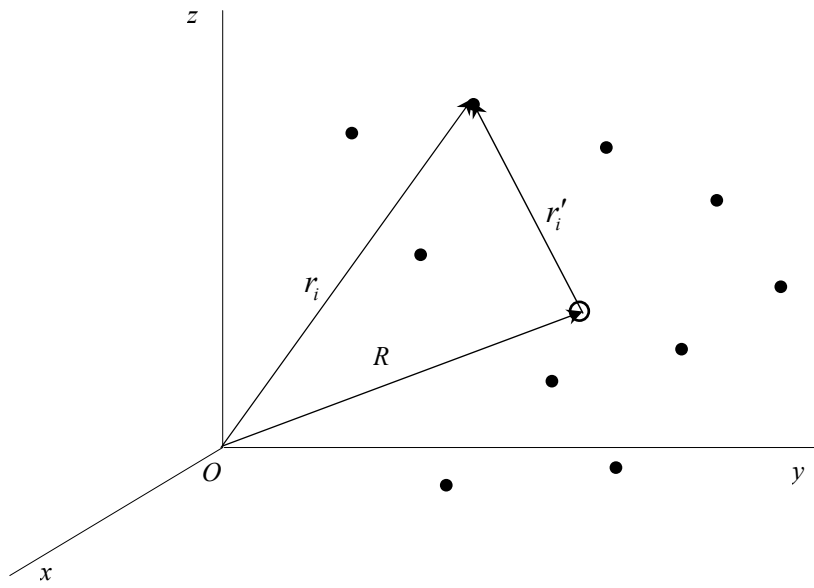


Рис. 1.5

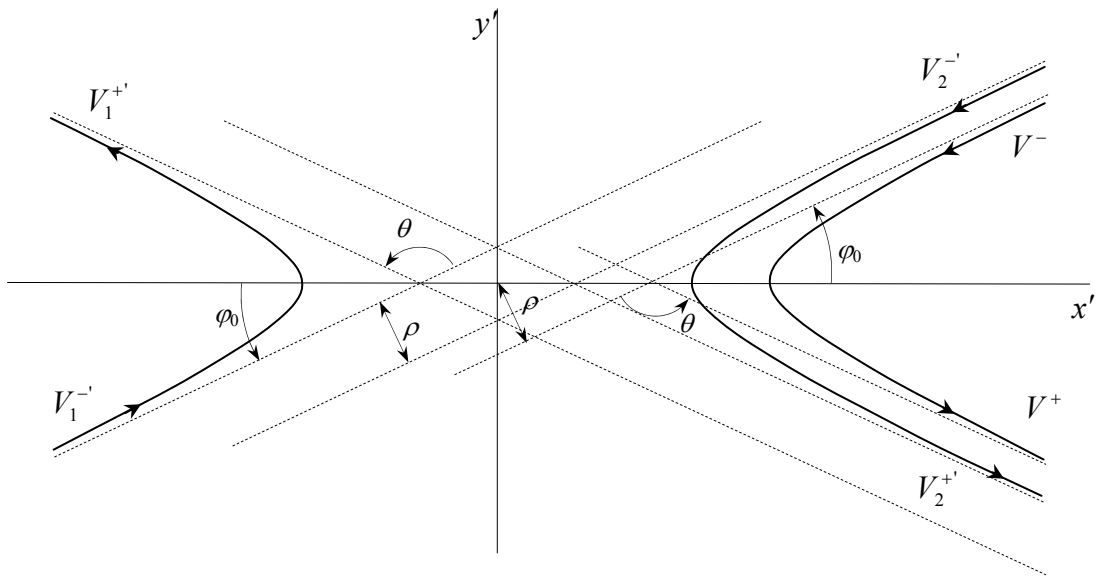


Рис. 1.6

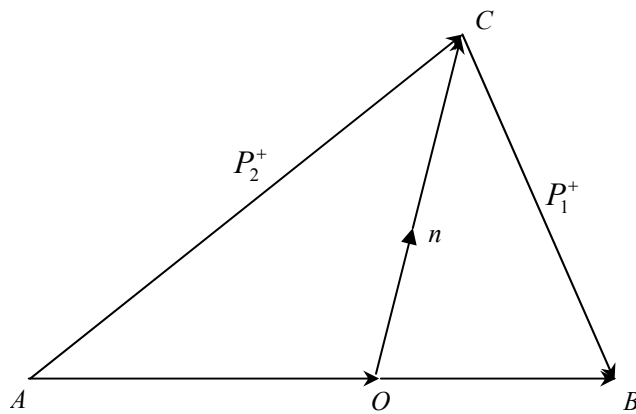


Рис. 2.6

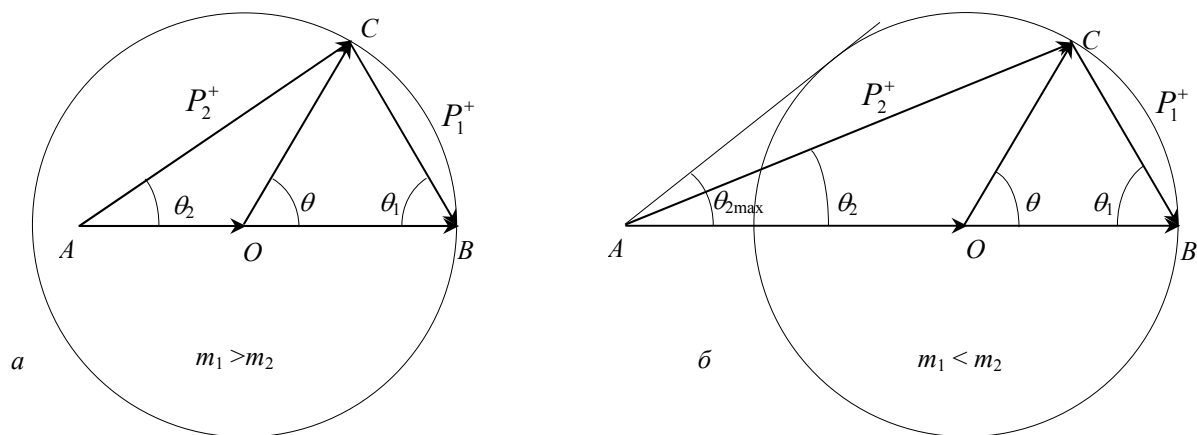


Рис. 3.6

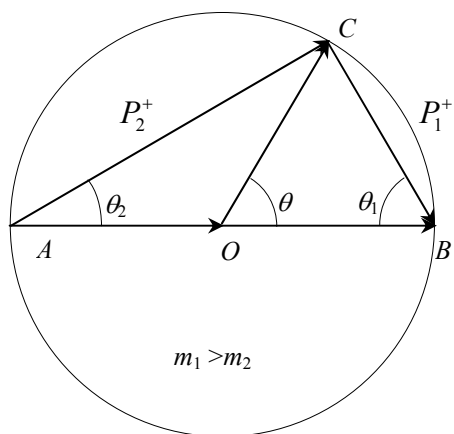


Рис. 4.6

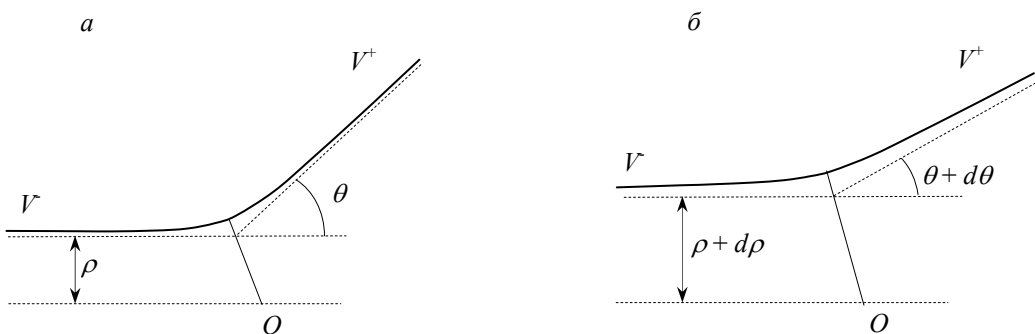


Рис. 5.6

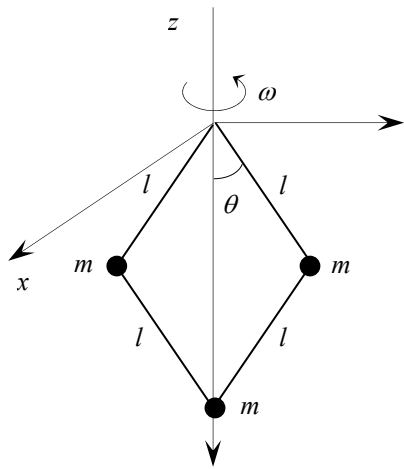


Рис. 1.7

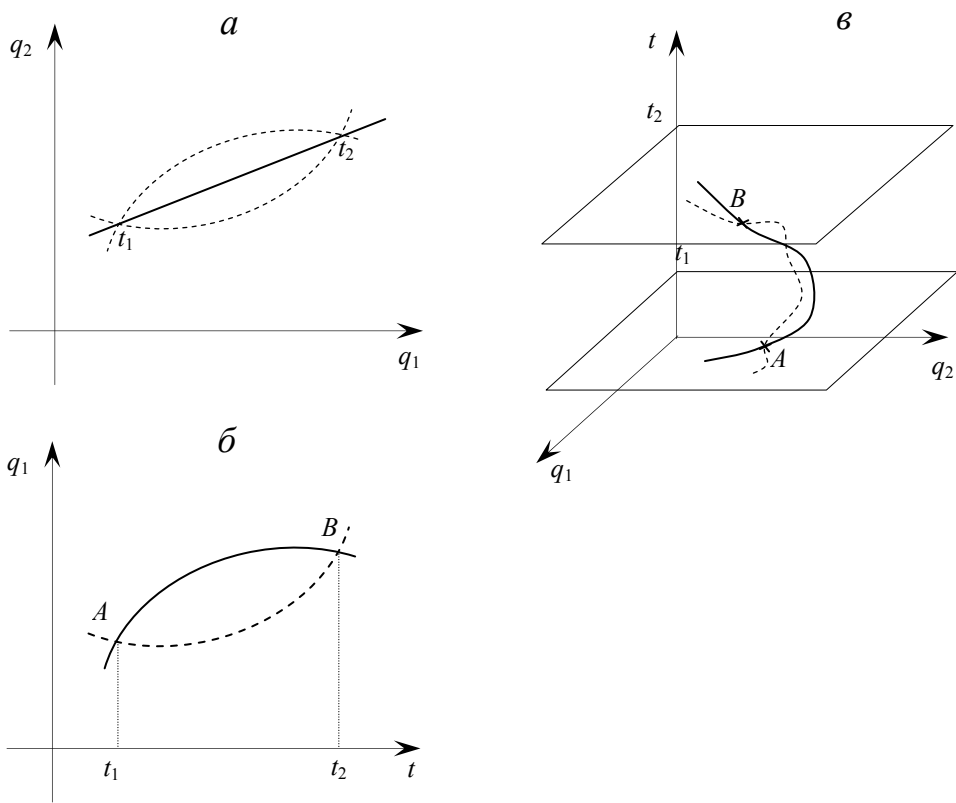


Рис. 2.7



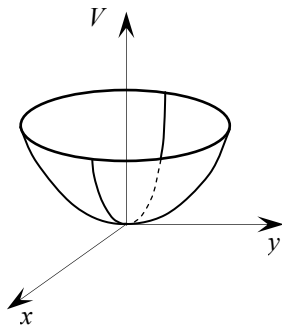


Рис. 1.8

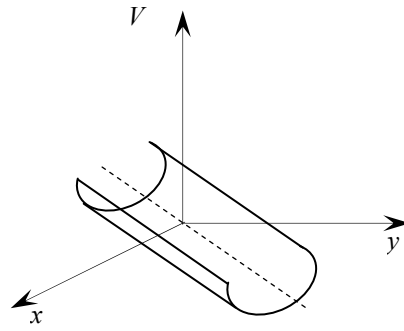


Рис. 2.8

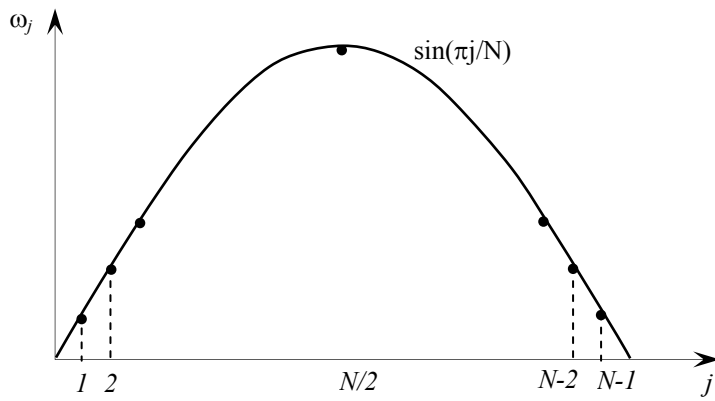
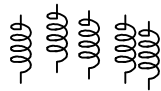


Рис. 4.8

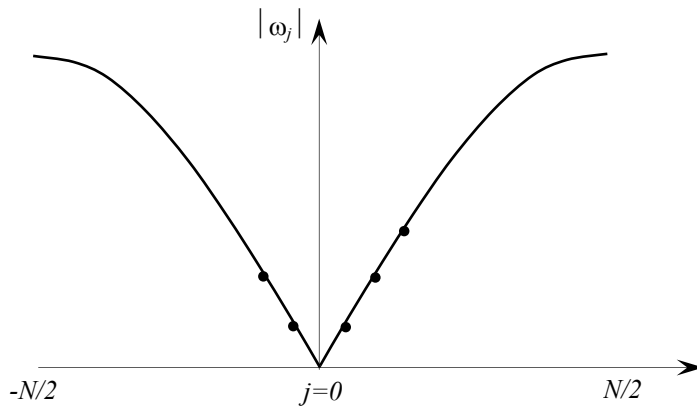
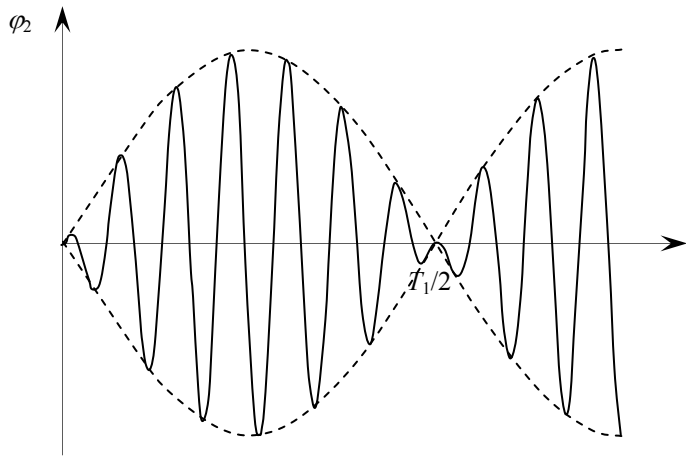
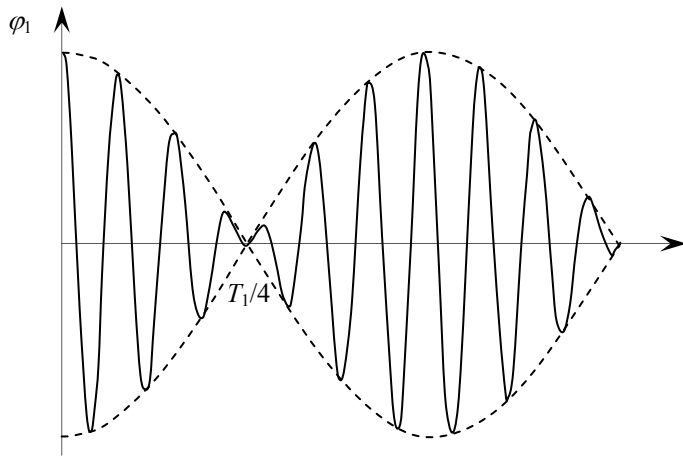


Рис. 5.8



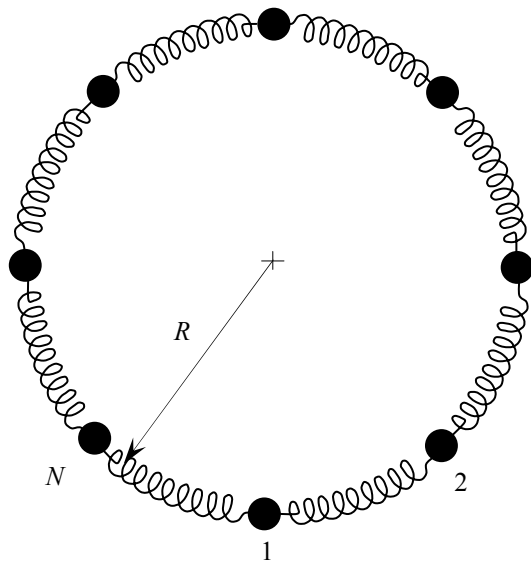


Рис. 3.8

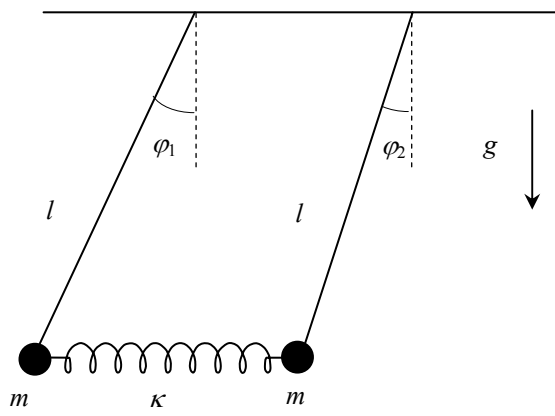


Рис. 6.8

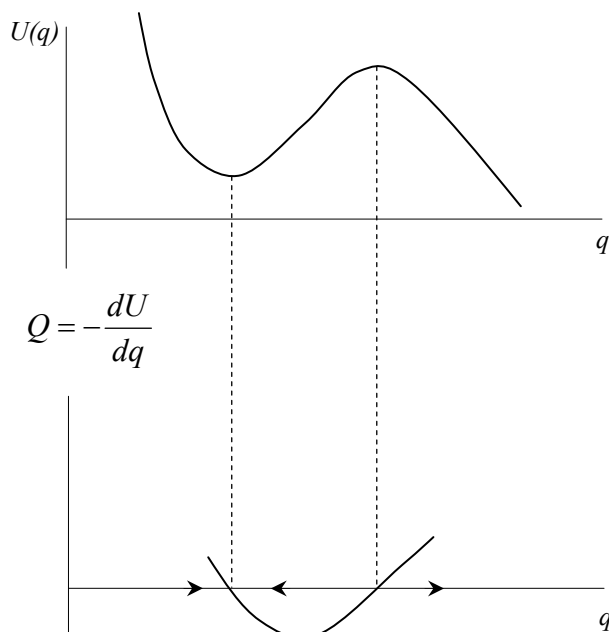


Рис. 8.8

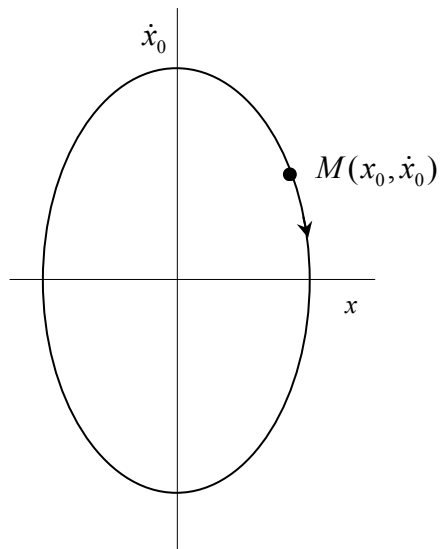


Рис. 9.8

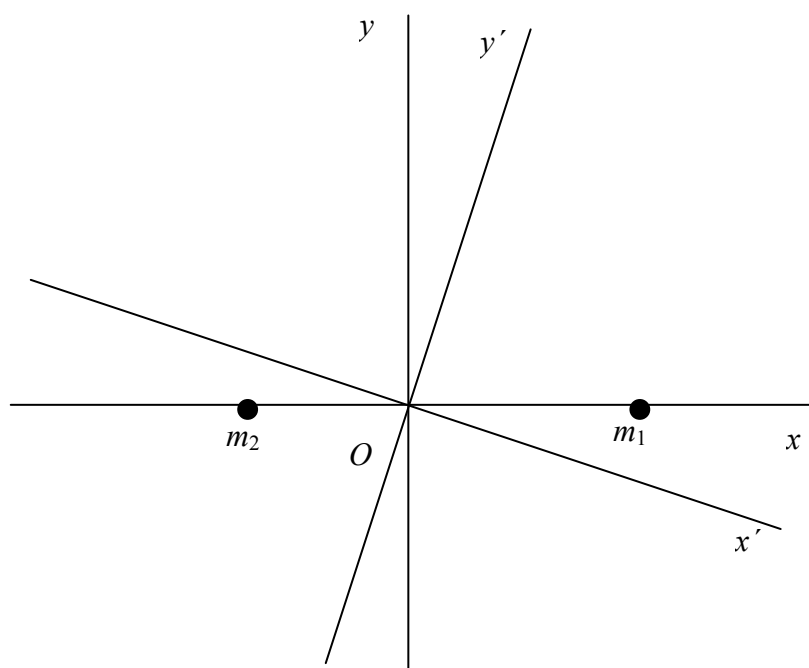


Рис. 2.9

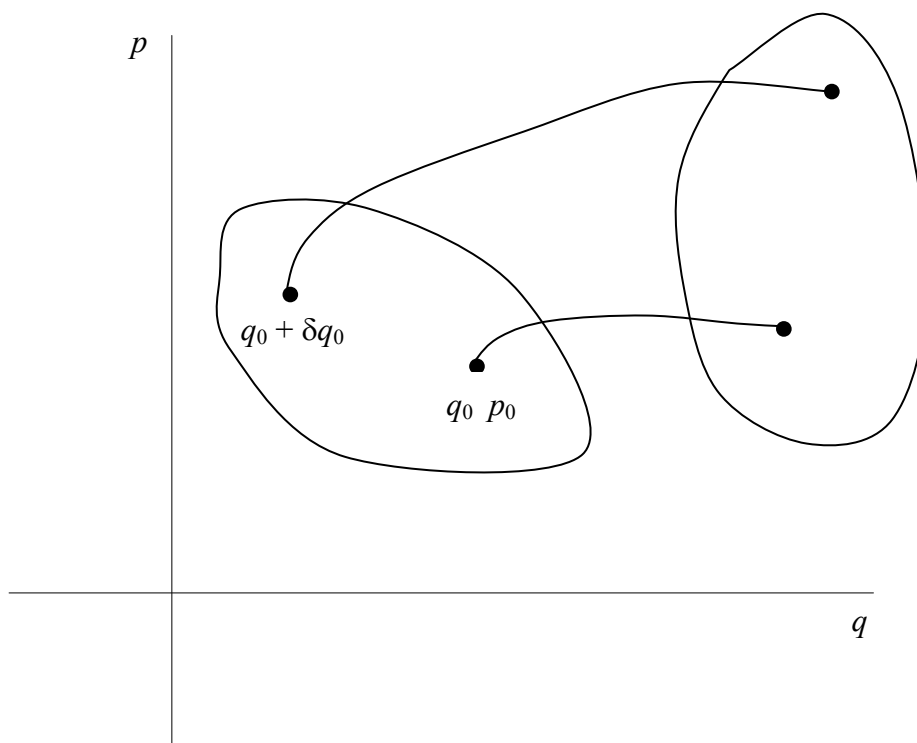


Рис. 1.10

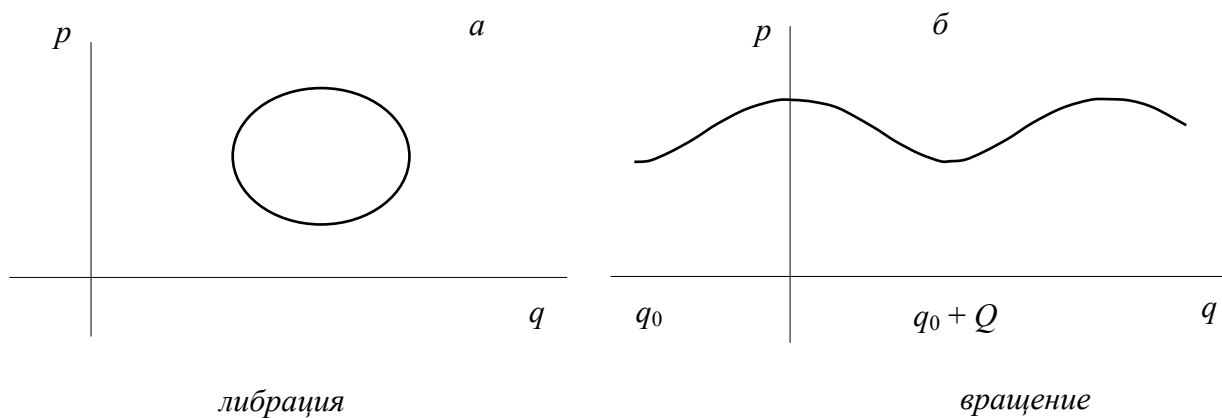


Рис. 1.11

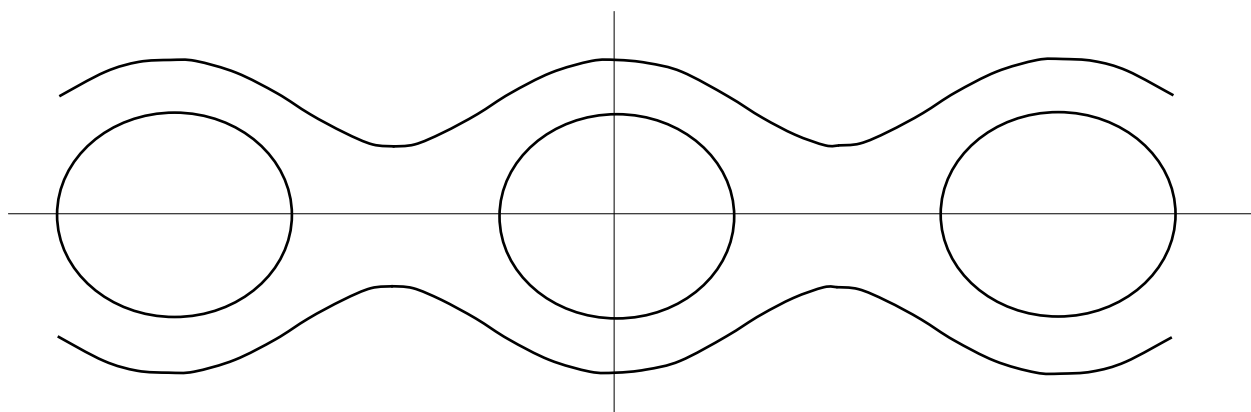
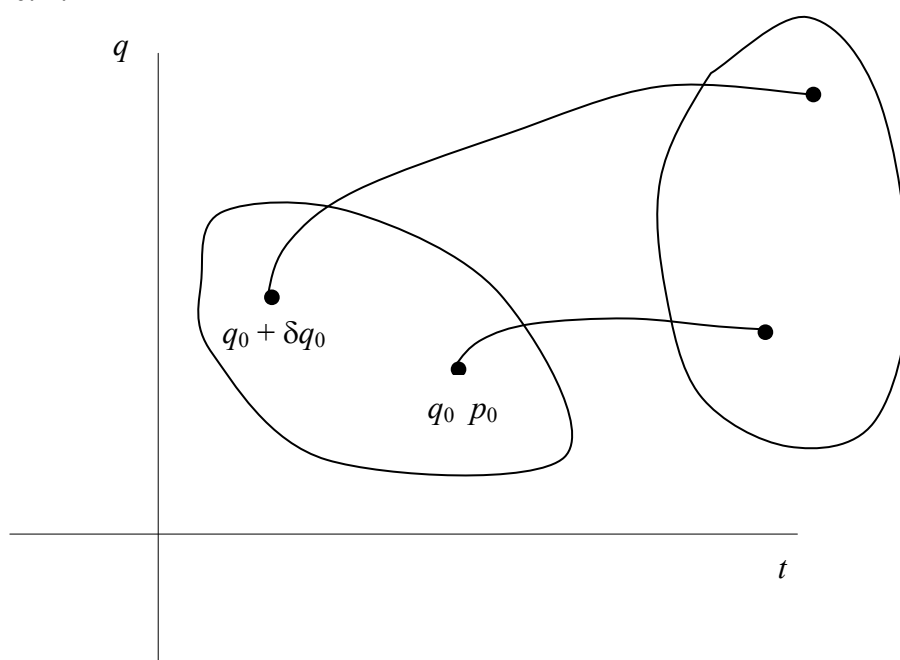


Рис. 2.11



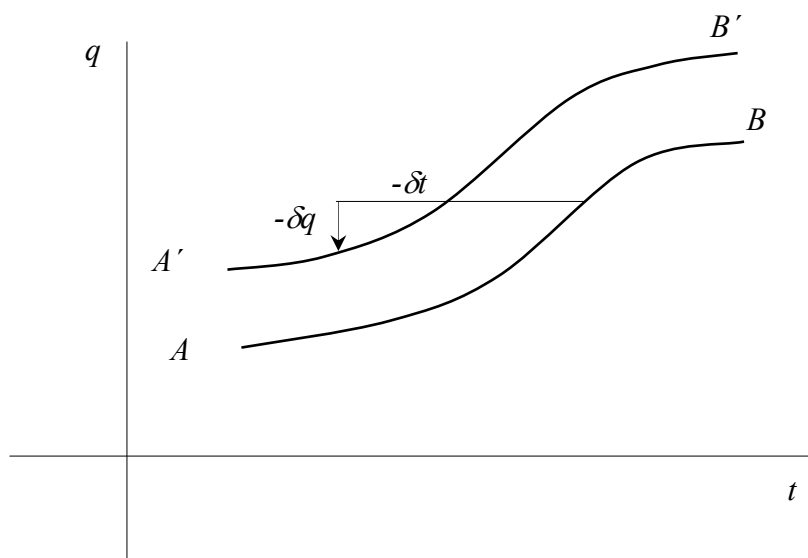


Рис. 3.11

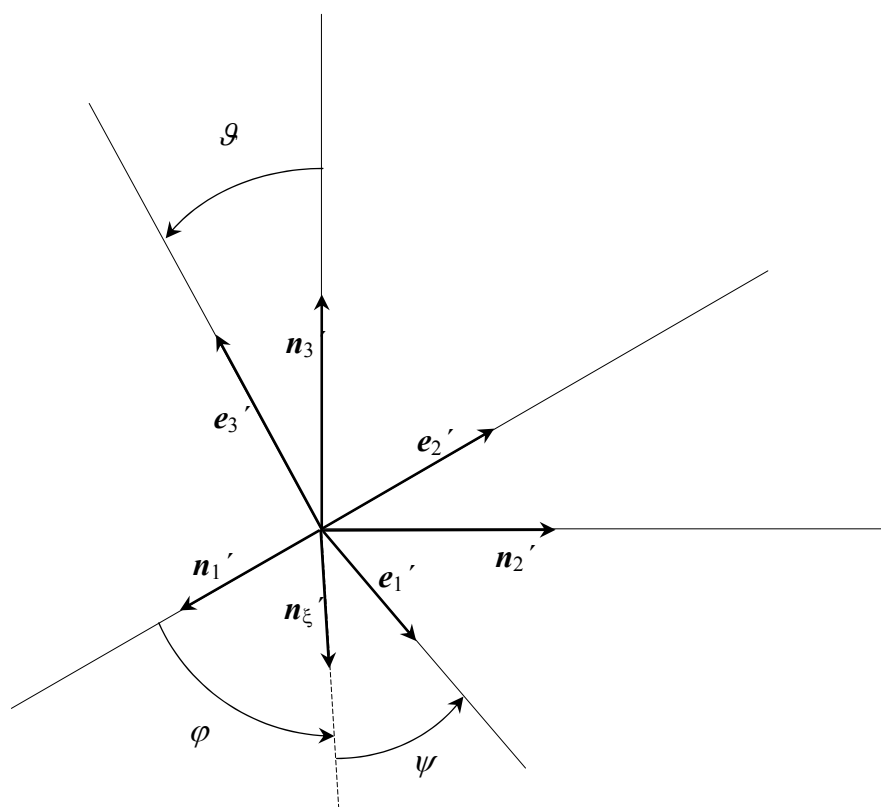


Рис. 1.12

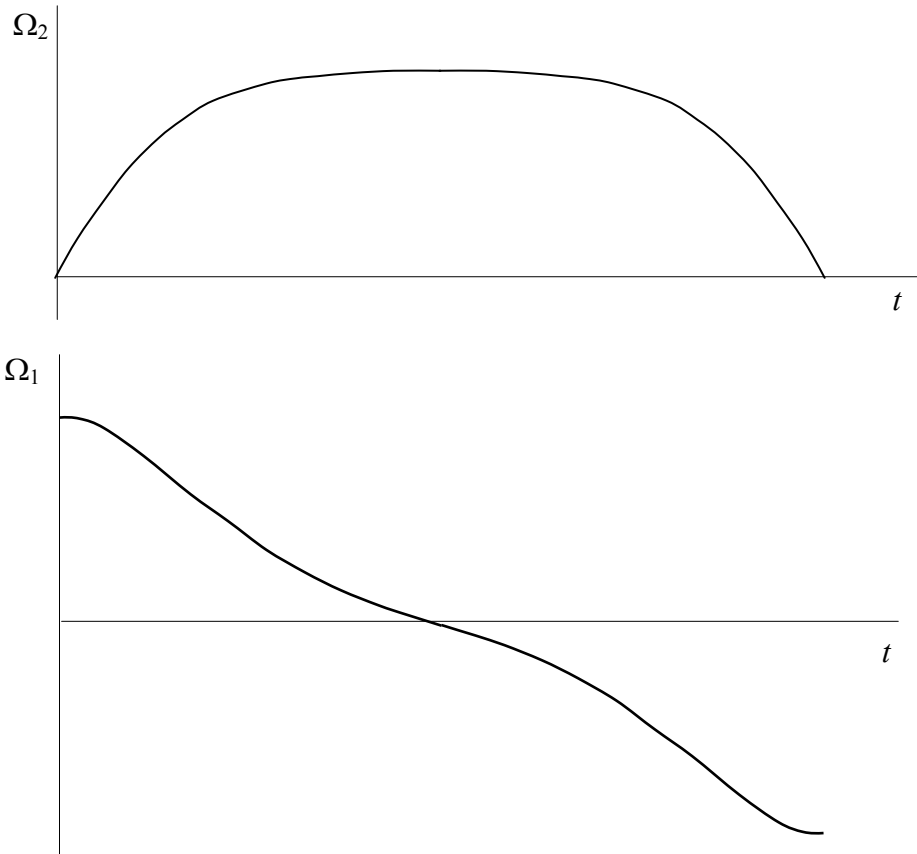


Рис. 2.13

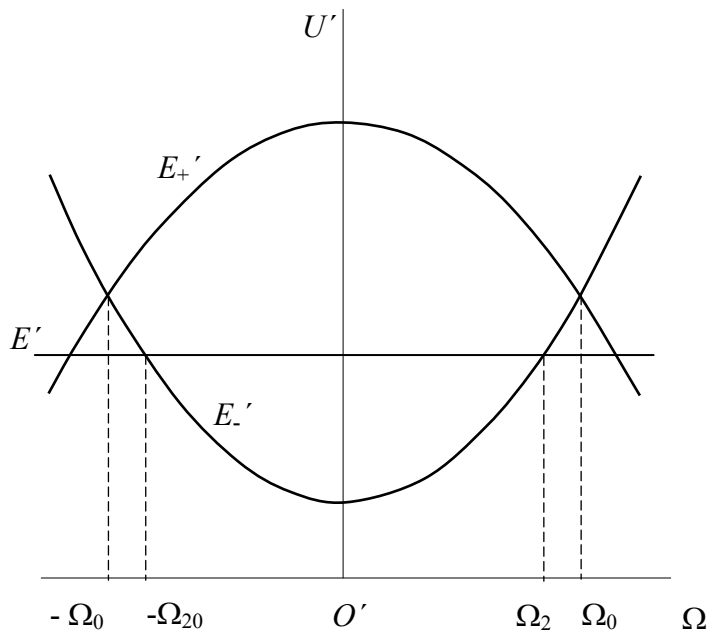


Рис. 1.13



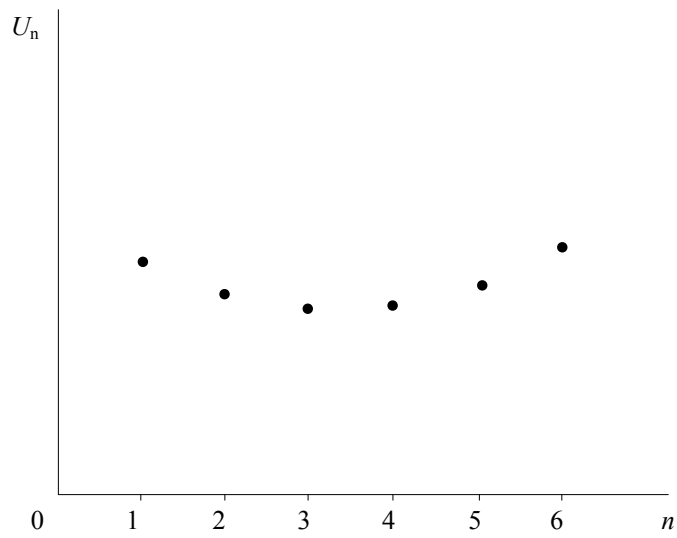


Рис. 1.14

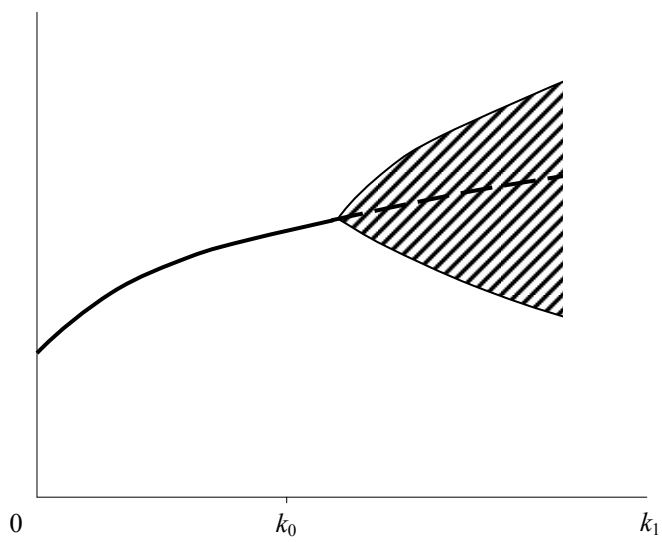


Рис. 2.14

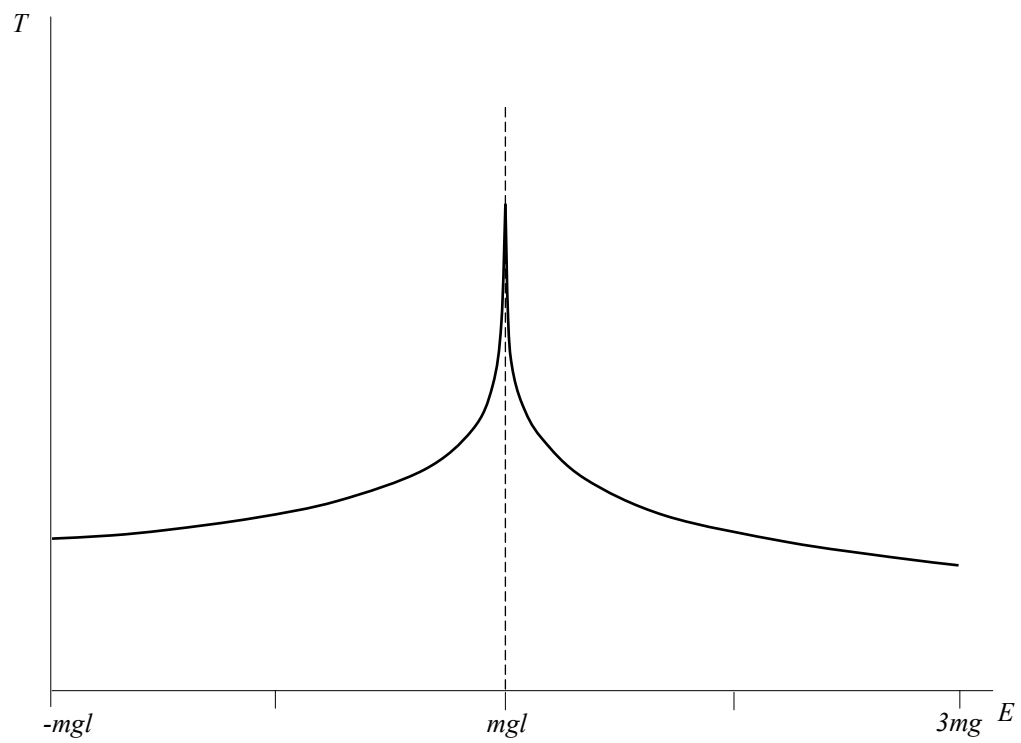


Рис. 3.14

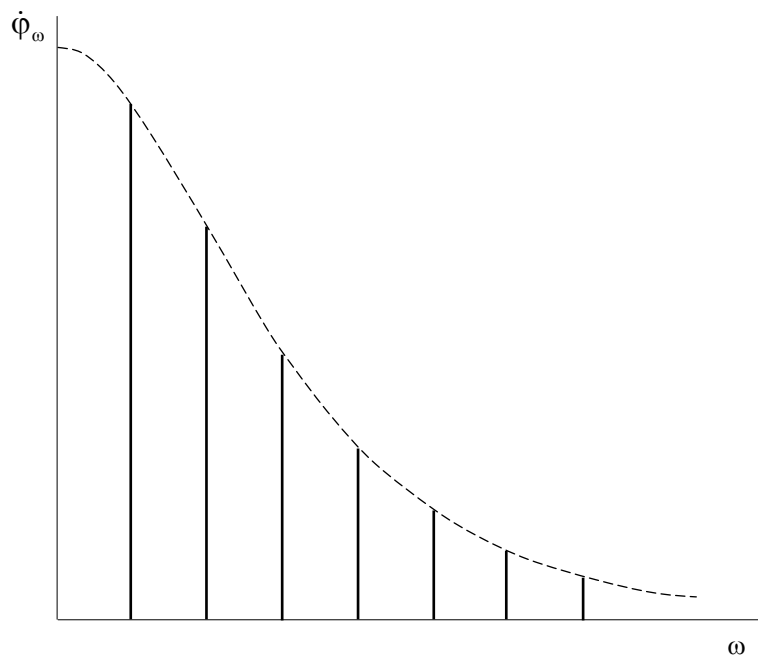


Рис. 4.14

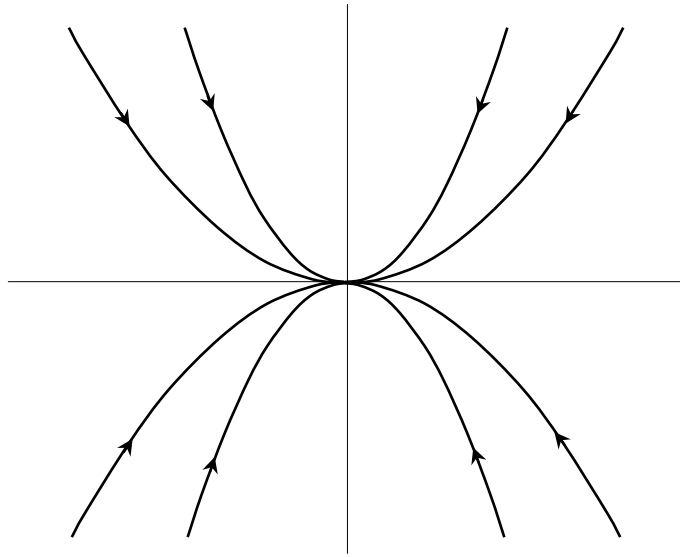


Рис. 1.15 а

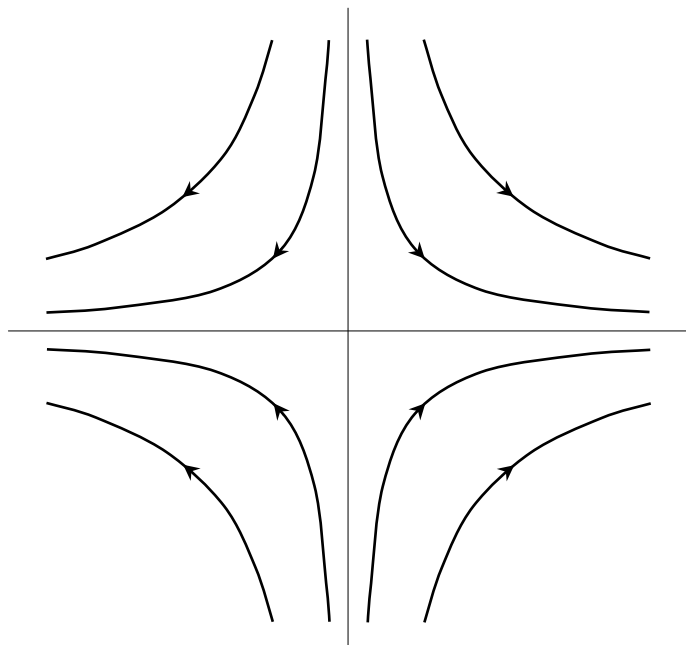


Рис. 1.15 б.

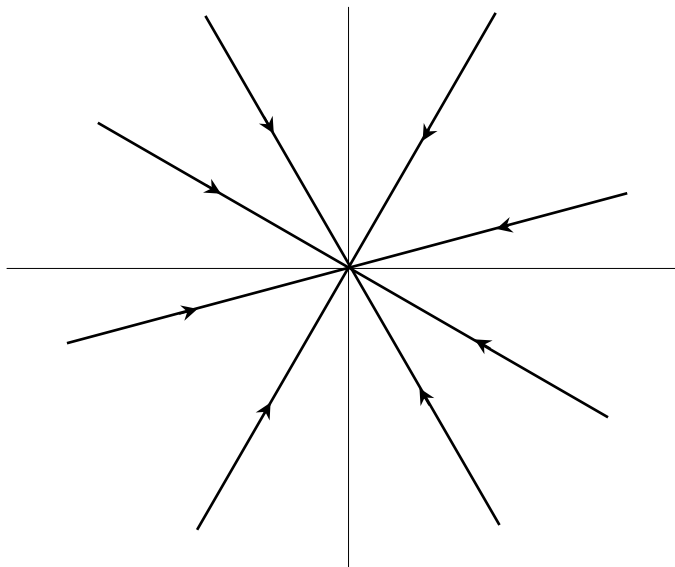


Рис. 1.15 д

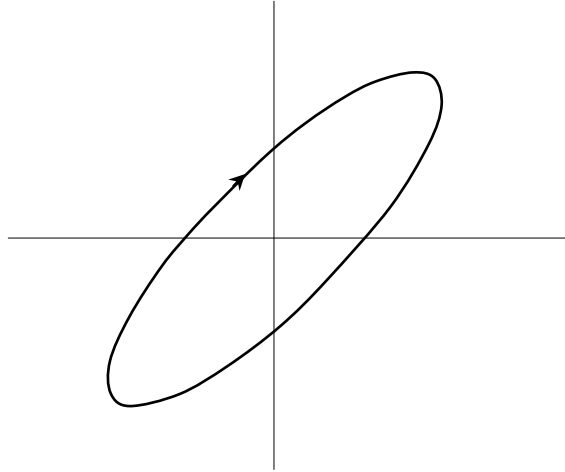


Рис. 1.15 в

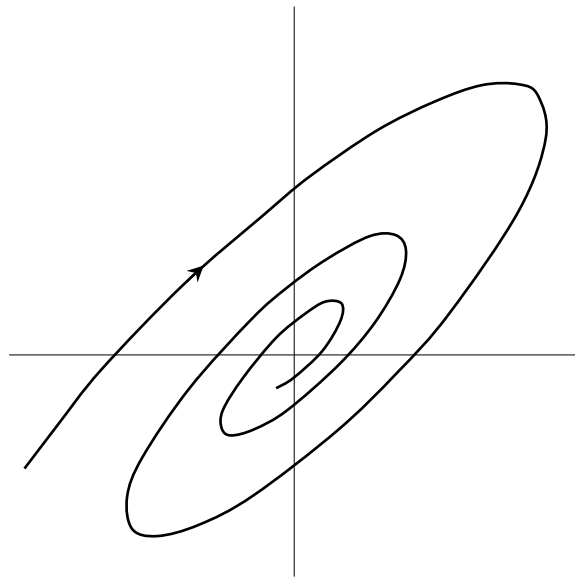


Рис. 1.15 г.

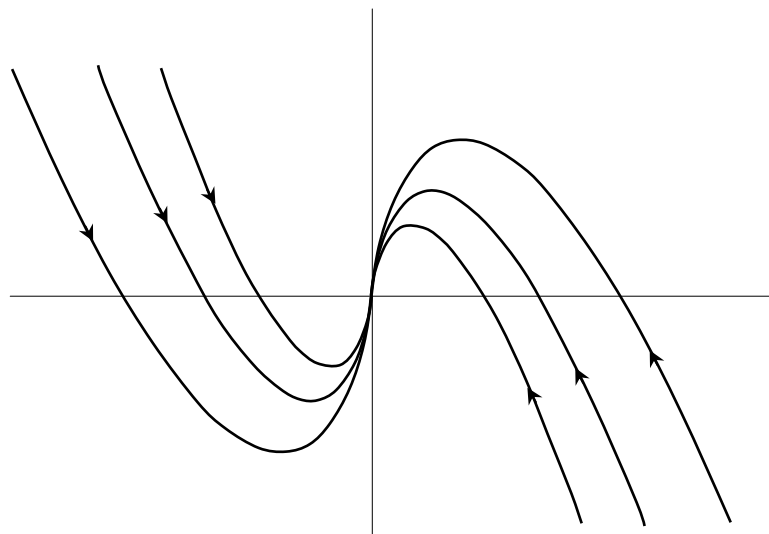


Рис. 1.15 е

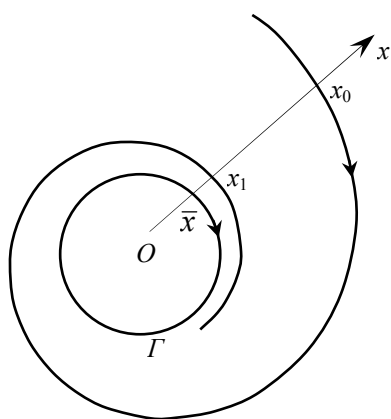


Рис. 2.15

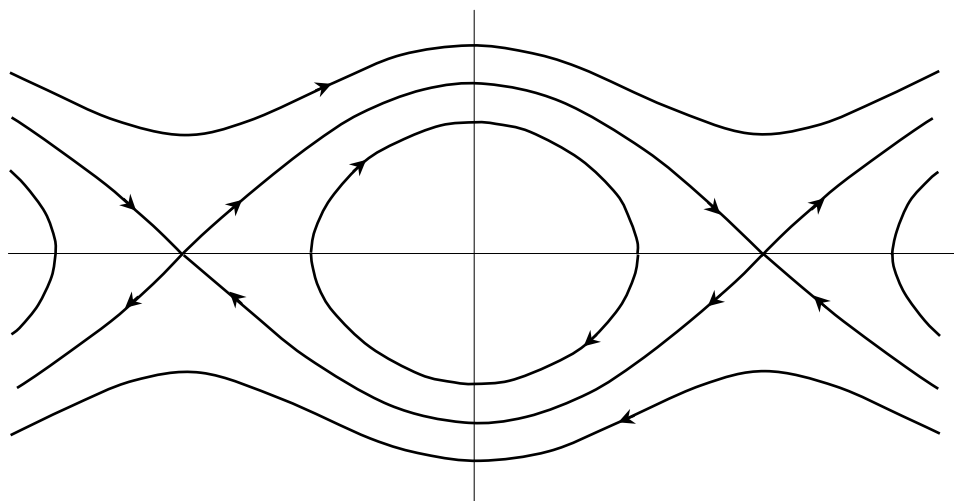


Рис. 4.15

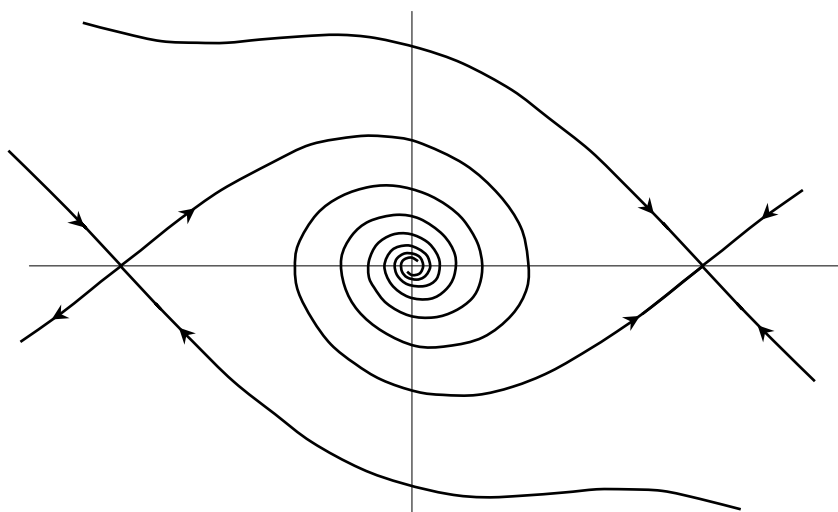


Рис. 5.15

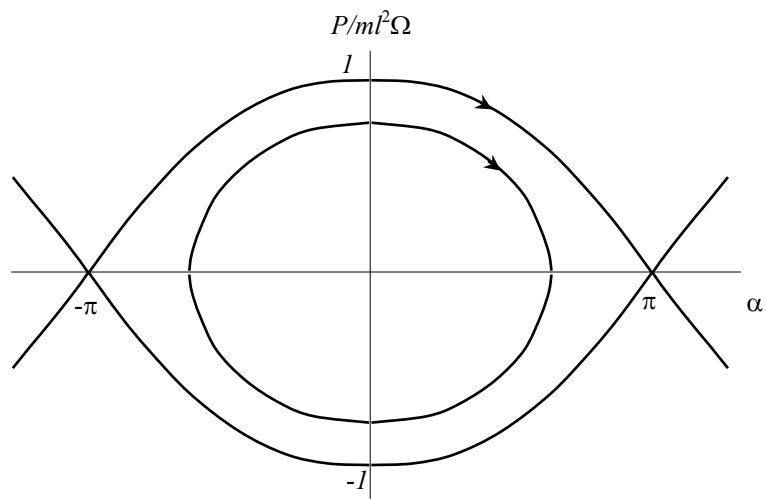


Рис. 10.15

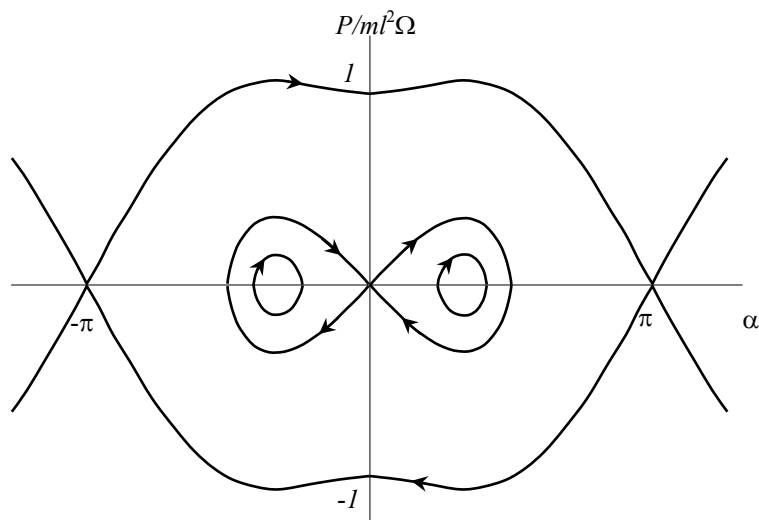


Рис. 10.15

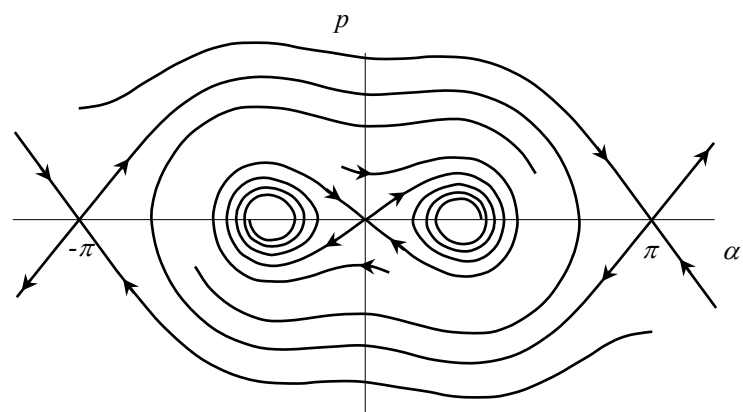


Рис. 13.15

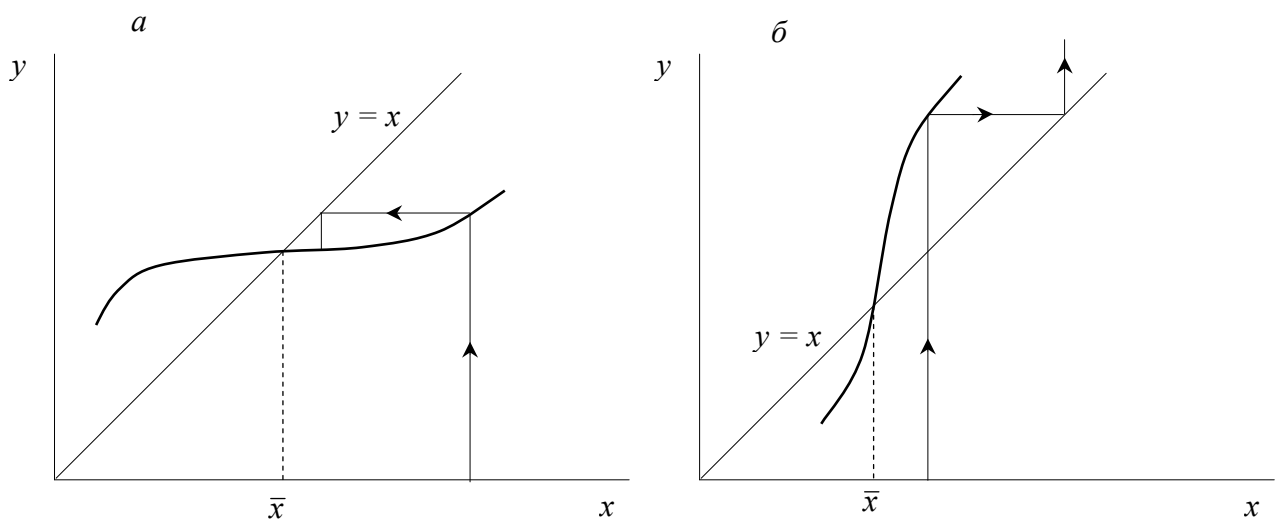


Рис. 3.15

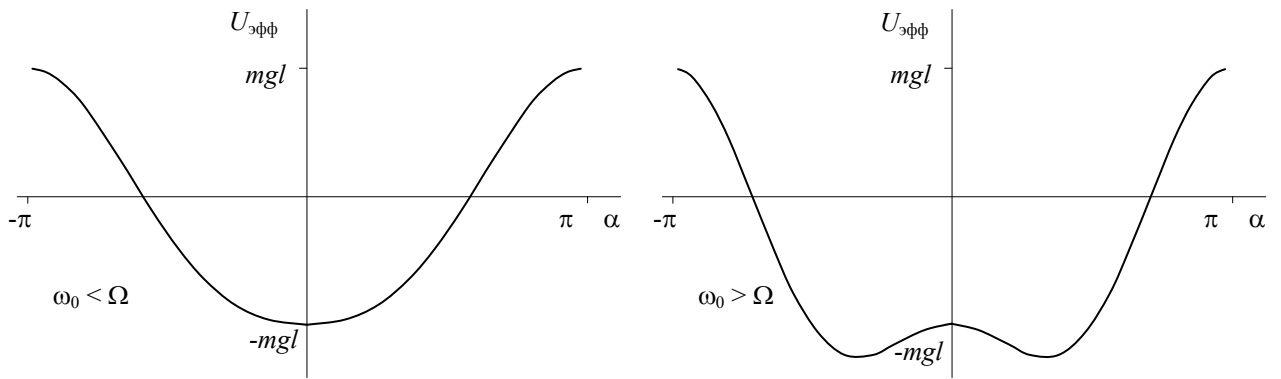


Рис. 9.15

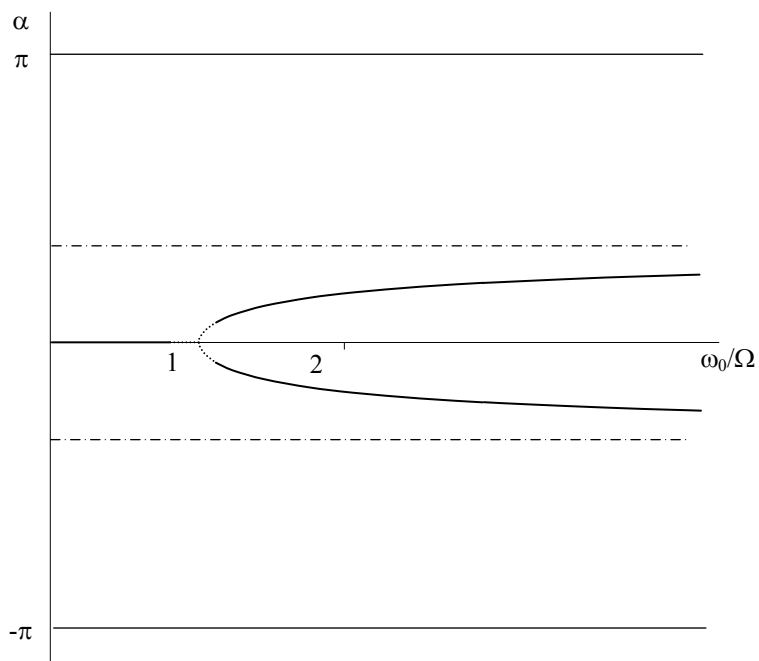


Рис. 11.15

К рис. 11.15

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\kappa}{ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{ml^2}\right)^4 + \Omega^2 \frac{1-z^2}{z}}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{ml^2 \Omega}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\kappa}{ml^2 \Omega}\right)^4 + 1}$$


---

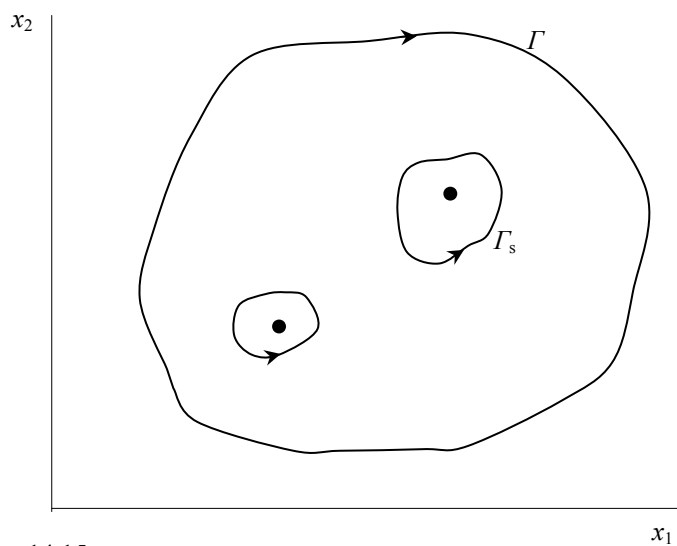


Рис. 14.15

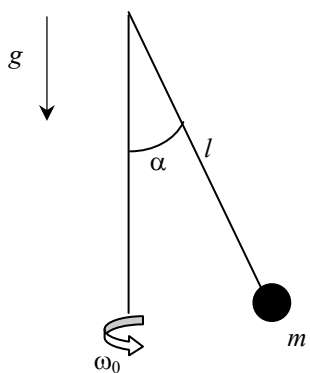


Рис. 8.15



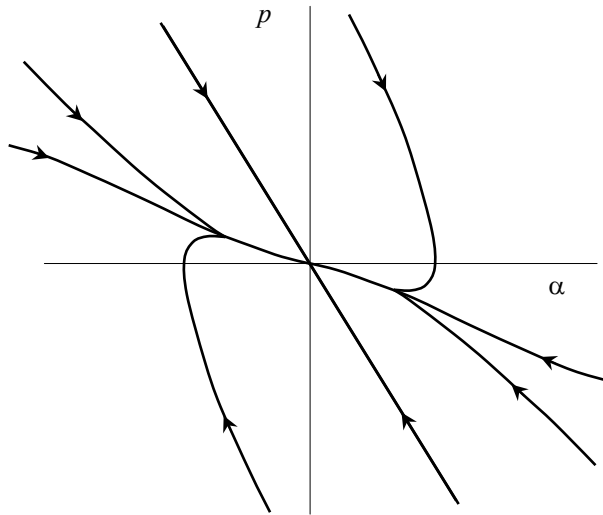


Рис. 12.15 (а)

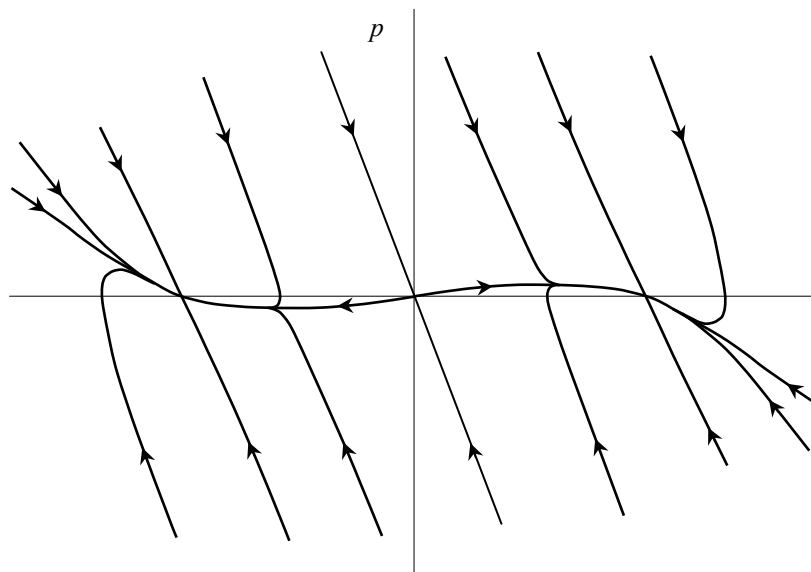


Рис. 12.15 (б)

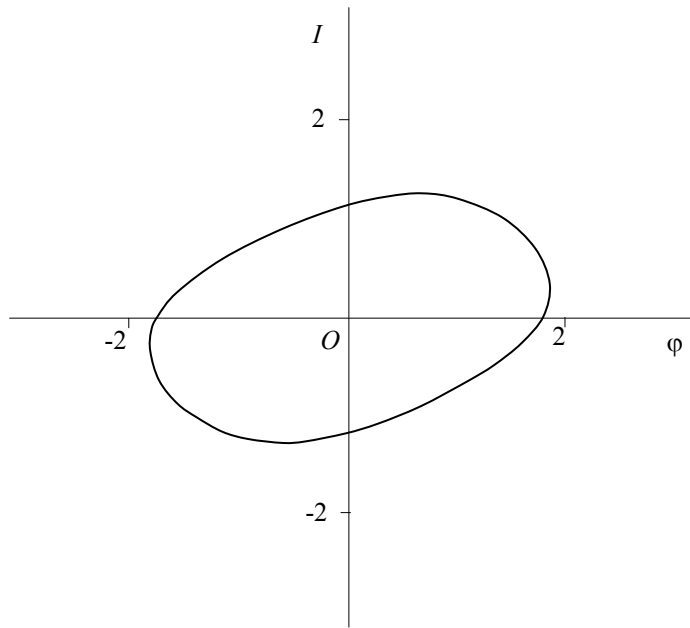


Рис. 17.15

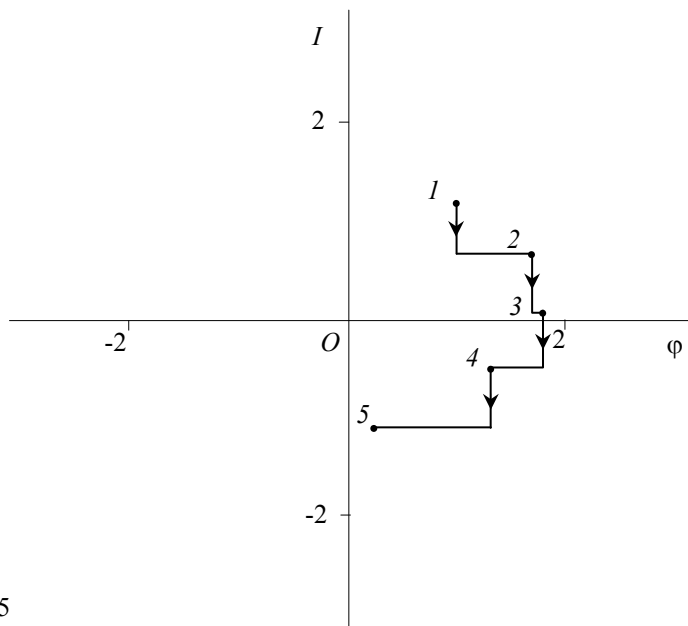


Рис. 16.15

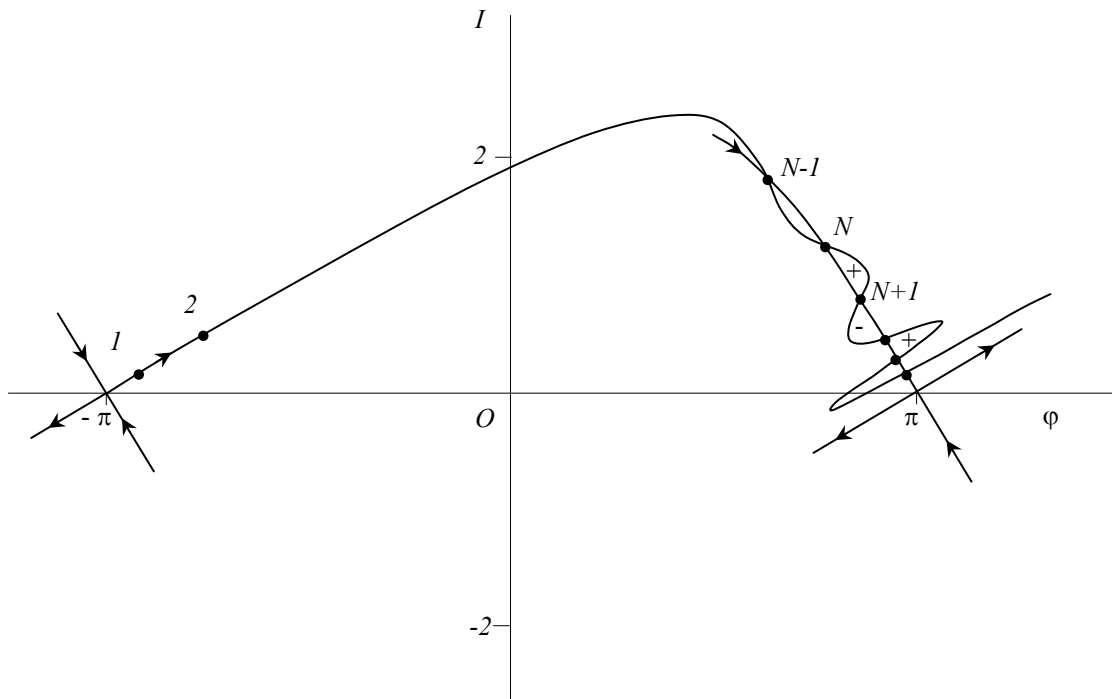


Рис. 18.15

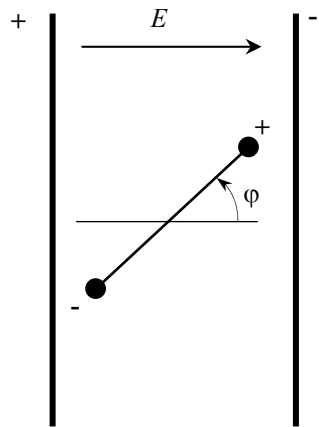


Рис. 15.15

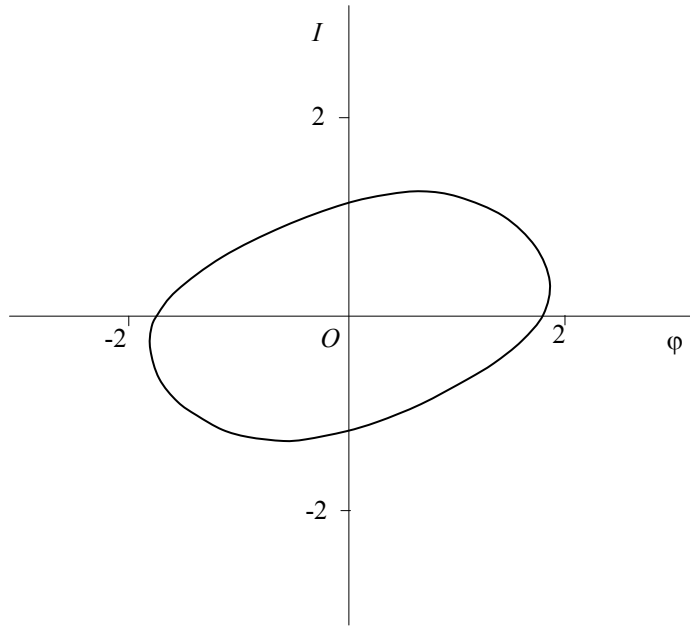


Рис. 17.15

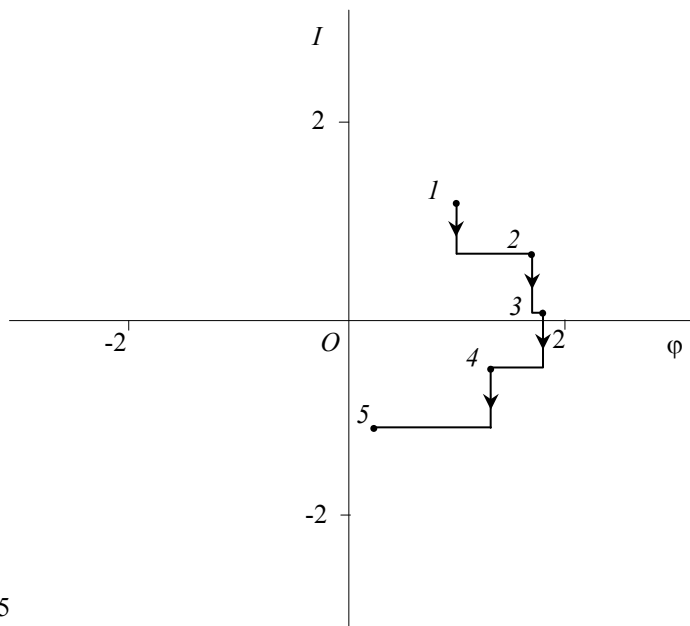


Рис. 16.15

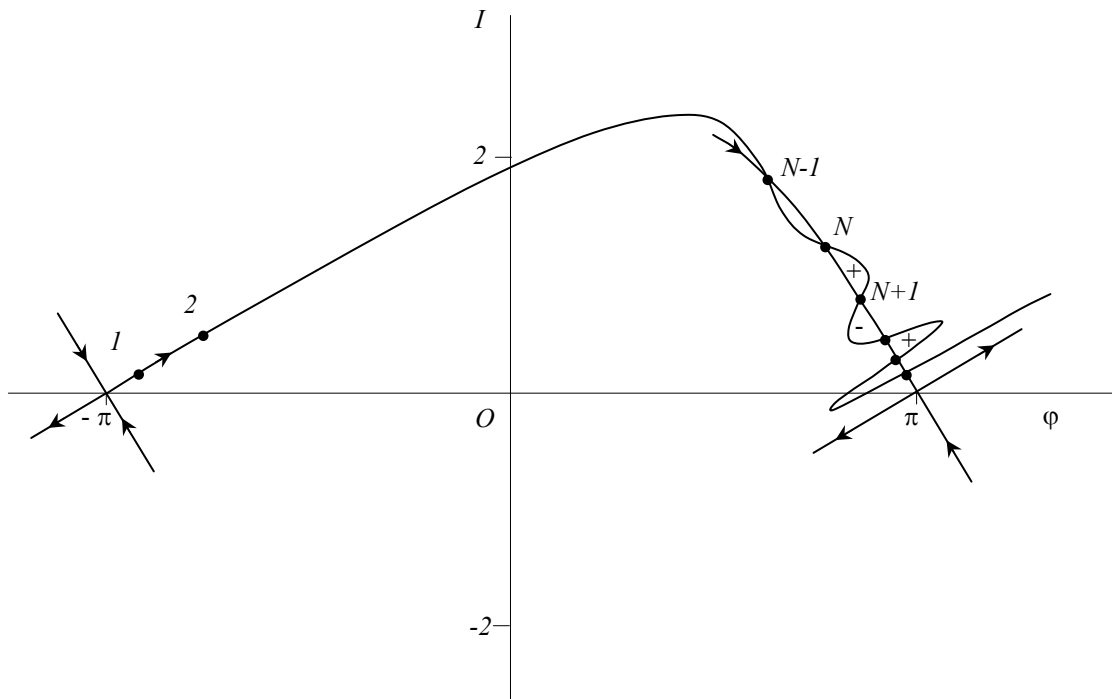


Рис. 18.15

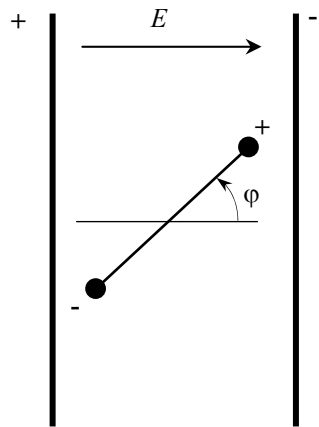


Рис. 15.15