

**Вопросы и задачи по теоретической механике (Программа минимум. 2-й поток). Идут в порядке лекций + написаны билеты которым соотв. тема.**

Б9(1): Движение механических систем при наложенных связях. Голономные связи. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера.

Б4(1): Решение задачи динамики одномерной системы. Качественное исследование. Движение вблизи точек остановки.

Б17(1): Период колебаний как функция энергии (Формула периода колебаний одномерного движения). Гармонический осциллятор.

Б15(1): Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями (1-го рода). Законы сохранения для системы при наличии связей.

Б1(1): Собственные и вынужденные одномерные колебания.

Б2(1): Затухающие одномерные колебания. Аперiodический режим движения. Фазовая плоскость.

Б23(1) - один из двух последующих.

Б18(1): Движение частиц в центрально-симметричном поле. Общее решение задачи в квадратурах. Качественное исследование. Точки поворота. Классификация траекторий.

Б21(1): Движение частиц в центрально-симметричном поле. Формулы для периода радиального движения частицы и смещения перигея в центральном поле.

Условие замкнутости траекторий.

Б20(1): Задача Кеплера. Вектор-интеграл Лапласа.

Б6(1): Система материальных точек. Внутренние силы. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии системы точек.

Аддитивные интегралы движения и свойства пространства-времени. Группа движений Галилея.

Б14(1): Механическое подобие. Теорема вириала.

Б7(1): Задача двух тел. Общее решение задачи (в квадратурах) методом интегралов движения.

Б8(1): Упругое рассеяние частиц. Эффективное поперечное сечение рассеяния. Формула Резерфорда.

Б5(1): Падение частиц в центр поля и захват частиц. Полное сечение захвата частиц.

Б10(1): Уравнения Лагранжа в независимых координатах (вывод из общего уравнения механики) и их ковариантность при точечных преобразованиях.

Б19(1): Обобщенный импульс и обобщенная энергия. Интегралы движения уравнений Лагранжа.

Б11(1): Функция Лагранжа заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный потенциал. Обобщенная сила в уравнениях Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Б3(1):Общее решение уравнений Лагранжа механической системы с  $s$  степенями свободы вблизи положений устойчивого равновесия.

Б12(1):Малые колебания динамических систем с 5 степенями свободы. Устойчивость движения. Теорема Лагранжа. Собственные частоты. Нормальные координаты.

Б3(1): (св-ва ортогональности в билете еще)Векторы смещений.

Б13(1):Задача об обмене колебаниями в системе двух слабосвязанных математических маятников. Биения.

Неособенные лагранжианы. Представление уравнений Лагранжа в эквивалентной форме уравнений Гамильтона.

Б16(1):Интегральные принципы механики. Принцип наименьшего действия. Модифицированный-принцип Гамильтона.

Б5(2):Гамильтоновы системы. Канонические уравнения. Скобки Пуассона. Теорема Пуассона.

Б13(2):Функция Гамильтона заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный потенциал. Интегралы движения гамильтоновой системы.

Б6(2):Канонические преобразования. Производящие функции и инварианты канонических преобразований.

Б1(2):Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби.

Б17(2):Метод разделения переменных переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и решения канонических уравнений.

Б2(2):Консервативные гамильтоновы системы. Укороченное действие. Канонические переменные "действие-угол".

Переменные "действие-угол" и общие свойства условно-периодических движений. Условие полностью вырожденного движения.

Б21(2)Понятие об интегрируемых механических системах. Теорема Лиувилля об интегрируемости. Примеры интегрируемых систем(Гамильтона-Якоби).

Б20(2):Механические системы с медленно-меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты.

Б4(2):Число степеней свободы твердого тела. Углы Эйлера. Угловая скорость твердого тела. Кинематические уравнения Эйлера.

Б14(2): Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции твердого тела и его свойства.

Б7(2): Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера.

Б16(2): Функция Лагранжа тяжелого симметрического волчка. Интегралы движения.

Б3(2): Характерные свойства и способы описания сплошной среды. Поле перемещений. Тензоры и векторы полей поворотов и деформаций.

Б3,18(2): Поле скоростей. Тензоры и векторы, характеризующие поля вихря и скорости деформаций.

Б15(2): (Объемные и ) Поверхностные силы. Тензор локальных напряжений. Изэнтропическое движение сплошной среды. Уравнения Эйлера.

Б8(2): Баротропное движение идеальной жидкости (в вект ф-ме в билетах). Уравнения движения в векторной форме. Теоремы Бернулли и Коши.

Б9(2): Уравнения неразрывности для массы, импульса и энергии идеальной жидкости. Потоки энергии и импульса сплошной среды.

Б11(2) Сжимаемая сплошная среда. Звуковые волны. Эффект Доплера.

Б12(2): Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа. Число Маха.

Б23(2): Поверхности разрыва в однородном потоке сжимаемого газа. Ударные волны. Ударная адиабата Погонно.

Б10(2): Касательные напряжения. Тензор напряжений "линейной" вязкой жидкости.

Б19(2): Динамически-подобные течения. Число Рейнольдса.

44 всего вопроса.

## Теоретическая механика и основы механики сплошной среды

Лектор — профессор В. Р. Халилов (4 и 5 семестры, 2-й поток)

1. Движение механических систем при наложенных связях. Голономные связи. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера. Решение задачи динамики одномерной системы. Качественное исследование. Движение вблизи точек остановки. Период колебаний как функция энергии. Гармонический осциллятор. Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями (1-го рода). Законы сохранения для системы при наличии связей. Собственные и вынужденные одномерные колебания. Затухающие одномерные колебания. Аперiodический режим движения. Фазовая плоскость.
2. Движение частиц в центрально-симметричном поле. Общее решение задачи в квадратурах. Качественное исследование. Точки поворота. Классификация траекторий. Формулы для периода радиального движения частицы и смещения перигея в центральном поле. Условие замкнутости траекторий. Задача Кеплера. Вектор-интеграл Лапласа.
3. Система материальных точек. Внутренние силы. Инвариантность функции Лагранжа изолированной системы  $N$  материальных точек относительно преобразований "группы движений Галилея". Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии системы точек. Аддитивные интегралы движения изолированной системы  $N$  материальных точек и свойства пространства-времени. Инерциальные системы отсчета.
4. Механическое подобие. Теорема вириала. Задача двух тел. Общее решение задачи (в квадратурах) методом интегралов движения. Упругое рассеяние частиц. Эффективное поперечное сечение рассеяния. Формула Резерфорда. Падение частиц в центр поля и захват частиц. Полное сечение захвата частиц.
5. Уравнения Лагранжа в независимых координатах (вывод из общего уравнения механики) и их ковариантность при точечных преобразованиях. Обобщенный импульс и обобщенная энергия. Интегралы движения уравнений Лагранжа. Функция Лагранжа заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный потенциал. Обобщенная сила в уравнениях Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.
6. Общее решение уравнений Лагранжа механической системы с  $s$  степенями свободы вблизи положений устойчивого равновесия. Малые колебания динамических систем с  $s$  степенями свободы. Устойчивость движения. Теорема Лагранжа. Собственные частоты. Нормальные координаты. Векторы смещений. Задача об обмене колебаниями в системе двух слабосвязанных математических маятников. Биения.
7. Неособенные лагранжианы. Представление уравнений Лагранжа в эквивалентной форме уравнений Гамильтона. Интегральные принципы механики. Принцип наименьшего действия. Модифицированный принцип Гамильтона. Гамильтоновы системы. Канонические уравнения. Скобки Пуассона. Теорема Пуассона. Функция Гамильтона заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Интегралы движения гамильтоновой системы.
8. Канонические преобразования. Производящие функции и инварианты канонических преобразований. Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби. Метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и решения канонических уравнений. Консервативные гамильтоновы системы. Укороченное действие. Канонические переменные "действие-угол". Переменные "действие-угол" и общие свойства условно-периодических движений. Условие полностью вырожденного движения.
9. Понятие об интегрируемых механических системах. Теорема Лиувилля об интегрируемости. Примеры интегрируемых систем. Механические системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты.
10. Число степеней свободы твердого тела. Углы Эйлера. Угловая скорость твердого тела. Кинематические уравнения Эйлера.
11. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции твердого тела и его свойства. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера. Функция Лагранжа тяжелого симметрического волчка. Интегралы движения.
12. Характерные свойства и способы описания сплошной среды. Поле перемещений. Тензоры и векторы полей поворотов и деформаций. Поле скоростей. Тензоры и векторы, характеризующие поле вихря и скорости деформаций.
13. Объемные и поверхностные силы. Тензор локальных напряжений. Изэнтропическое движение сплошной среды. Уравнения Эйлера. Баротропное движение идеальной жидкости. Уравнения движения в векторной форме. Теоремы Бернулли и Коши. Уравнения неразрывности для массы, импульса и энергии идеальной жидкости. Потоки энергии и импульса сплошной среды. Сжимаемая сплошная среда. Звуковые волны. Эффект Доплера. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа. Число Маха. Поверхности разрыва в однородном потоке сжимаемого газа. Ударные волны. Ударная адиабата Гюгонио. Касательные напряжения. Тензор напряжений "линейной" вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса. Динамически-подобные течения. Число Рейнольдса.

## Задачи к экзамену по теоретической механике (2-й поток)

1. Найти закон движения частицы массы  $m$  в поле  $U(x) = -U_0 \cos(x/a)$ ,  $a > 0$ , если в начальный момент времени квадрат скорости частицы  $v^2(0) = 4U_0/m$ , а  $x(0) = 0$ .
2. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда  $e$  массы  $m$  в скрещенных магнитном  $\mathbf{B}$  (в калибровке векторного потенциала  $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ ) и электрическом  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$  полях. Указать первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  радиус вектор частицы  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$  а вектор скорости  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ . Найти границы области движения заряда по координате  $x$ , если  $\mathbf{r}(0) = (h, 0, 0)$ , а  $\mathbf{v}(0) = (v, 0, 0)$ .
3. Составить функцию и уравнения Лагранжа частицы с зарядом  $e$ , массой  $m$ , находящейся в полости гладкой трубки исчезающе малого радиуса, изогнутой в форме окружности радиуса  $R$ . Трубка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг диаметра окружности. Вдоль оси вращения действует поле тяжести  $\mathbf{g}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Найти первый интеграл уравнений Лагранжа и закон движения в квадратурах.
4. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда  $e$  массы  $m$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$  (в калибровке векторного потенциала  $\mathbf{A} = (yH/2, -xH/2, 0)$ ) и электрическом поле  $\mathbf{E} = (-ax, ay, 0)$ ,  $a > 0$ . Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  радиус вектор частицы  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ , а вектор скорости  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ .
5. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц массы  $m$  в центральном поле  $U(r) = U_0$ ,  $r < R$ ,  $U(r) = 0$ ,  $r > R$ . Энергия частицы  $E_0$ .
6. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  может двигаться по поверхности конуса с углом при вершине  $2\alpha$ . Ось конуса вертикальна. В направлении оси конуса действуют поле тяжести  $\mathbf{g}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Записать функцию Лагранжа в цилиндрических координатах и найти закон движения в квадратурах. Найти все первые интегралы уравнений Лагранжа.
7. Частица может двигаться по наклонной плоскости (составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом) из точки  $B$  в точку  $A$ , упруго отражаясь от стенки в точке  $A$ . Найти, как изменяется энергия и максимальная высота подъема частицы при медленном изменении угла  $\alpha$ .
8. Найти траекторию и закон движения частицы с зарядом  $e$ , массой  $m$  в неоднородном электрическом поле  $\mathbf{E} = (ax, 0, bz)$  с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.
9. Стержень массы  $m$  и длины  $l$  движется в вертикальной плоскости так, что один из его концов скользит по горизонтальной прямой (есть поле тяжести). Найти закон движения стержня в квадратурах.
10. Найти, как изменяется амплитуда колебаний математического маятника при медленном изменении его длины.
11. Найти период колебаний частицы массы  $m$  в поле  $U(x) = -a/(|x|+b)$ ,  $a, b > 0$ . Энергия частицы  $E_0$ .
12. Как изменяется энергия частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$  в центральном поле  $U(\mathbf{r})$  при медленном (адиабатическом) включении слабого однородного магнитного поля напряженности  $\mathbf{H}$ .
13. Найти траекторию и закон движения (в квадратурах) частицы в поле  $U(\mathbf{r}) = ar^2$ ,  $a > 0$ , с помощью уравнения Гамильтона-Якоби (в сферических координатах).
14. Стержень массы  $m$  и длины  $l$  скользит по сторонам прямого угла без трения. Написать функцию Лагранжа и найти закон движения в квадратурах.
15. Найти траекторию (и угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек  $r_{\min}$ ) частицы с массой  $m$ , энергией  $E_0 < 0$  в центральном поле  $U(\mathbf{r}) = -a/r + b/r^2$ ,  $a, b > 0$ .
16. Найти траекторию и закон движения заряда  $e$ , массы  $m$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$  (векторный потенциал  $\mathbf{A} = (yH, 0, 0)$ ), решая уравнения Гамильтона. Указать все первые интегралы уравнений движения. В момент времени  $t_0 = 0$  радиус вектор частицы  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ , а вектор скорости  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ .
17. Вычислить скобки Пуассона  $[L_i, L_j]$ , где  $L_i$  - декартовы компоненты вектора момента импульса частицы.
18. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц массы  $m$  в центральном поле  $U(r) = a/r - a/r^4$ ,  $r < R$ ,  $U(r) = 0$ ,  $r > R$ . Энергия частицы  $E_0$ .
19. Вычислить скобки Пуассона  $[v_i, v_j]$ , где  $v_i$  - декартовы компоненты вектора скорости заряда  $e$ , массы  $m$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ .
20. Как изменяется механическая энергия и параметр орбиты финитного движения частицы с массой  $m$  в центральном поле  $U(\mathbf{r}) = -a/r$ ,  $a > 0$ , при адиабатическом изменении параметра  $a$ .
21. Система описывается лагранжианом
 
$$L = m \left( \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) / 2 - k \left( 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \right) / 2, \quad m, k > 0.$$
 Найти собственные частоты и закон движения, если  $x_1(0) = a$ ,  $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ .
22. Найти полное сечение захвата частиц массы  $m$  шариком радиуса  $R$ , находящимся в центре поля  $U(r) = a/r^2 - a/r^4$ ,  $a, b > 0$ . Энергия частицы  $E_0$ .
23. Как изменяется энергия системы, описываемой лагранжианом
 
$$L = m \left( \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) / 2 - k \left( x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \right) / 2, \quad m, k > 0$$
 при адиабатическом изменении параметра  $k$ ?

#### Билет 1

1. Собственные и вынужденные одномерные колебания.
2. Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби.
3. Задача 2

#### Билет 2

1. Затухающие одномерные колебания. Аперриодический режим движения. Фазовая плоскость.
2. Консервативные гамильтоновы системы. Укороченное действие. Канонические переменные "действие-угол".
3. Задача 6

#### Билет 3

1. Общее решение уравнений Лагранжа механической системы с  $s$  степенями свободы вблизи положений устойчивого равновесия. Свойства ортогональности. Векторы смещений. Собственные частоты. Нормальные координаты.
2. Характерные свойства и способы описания сплошной среды. Поле перемещений. Тензоры и векторы полей поворотов и деформаций.
3. Задача 7.

#### Билет 4

1. Решение задачи динамики одномерной системы. Качественное исследование. Движение вблизи точек остановки.
2. Число степеней свободы твёрдого тела. Углы Эйлера. Угловая скорость твёрдого тела. Кинематические уравнения Эйлера.
3. Задача 8

#### Билет 5

1. Падение частиц в центр поля и захват частиц. Полное сечение захвата частиц.
2. Гамильтоновы системы. Канонические уравнения. Скобки Пуассона. Теорема Пуассона.
3. Задача 9

#### Билет 6

1. Система материальных точек. Внутренние силы. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии системы точек.
2. Канонические преобразования. Производящие функции и инварианты канонических преобразований.
3. Задача 3

#### Билет 7

1. Задача 2-х тел. Общее решение задачи (в Квадратурах) методом интегралов движения.
2. Движение твёрдого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера.
3. Задача 10

#### Билет 8

1. Упругое рассеяние частиц. Эффективное поперечное сечение рассеяния. Формула Резерфорда.
2. Уравнения движения баротропной идеальной жидкости в векторной форме. Теоремы Бернулли и Коши.
3. Задача 11.

#### Билет 9

1. Движение механических систем при наложенных связях. Голономные связи. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера.
2. Уравнения неразрывности для массы, импульса и энергии идеальной жидкости. Поток энергии и импульса сплошной среды.
3. Задача 5

#### Билет 10

1. Уравнения Лагранжа в независимых координатах (вывод из общего уравнения механики) и их ковариантность при точечных преобразованиях.
2. Касательные напряжения. Тензор напряжения «линейной» вязкости.
3. Задача 12

#### Билет 11.

1. Функция Лагранжа заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Обобщённый потенциал. Обобщённая сила в уравнениях Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.
2. Сжимаемая сплошная среда. Звуковые волны. Эффект Доплера.
3. Задача 13

Билет 12.

1. **Малые колебания динамической системы с  $s$  степенями свободы. Устойчивость движения. Теорема Лагранжа. Собственные частоты. Нормальные координаты.**
2. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа. Число Маха.
3. **Задача 14.**

Билет 13.

1. **Задача об обмене колебаниями в системе 2-х слабосвязанных математических маятников. Биения.**
2. **Функция Гамильтона заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Интегралы движения гамильтоновой системы.**
3. **Задача 15**

Билет 14.

1. **Механическое подобие. Теорема вириала.**
2. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела. Тензор инерции твёрдого тела и его свойства.
3. **Задача 4**

Билет 15.

1. **Уравнения Лагранжа с неопределёнными множителями (1-го рода). Законы сохранения при наличии связей.**
2. Поверхностные силы. Тензор локальных напряжений. Изоэнтропическое движение сплошной среды. Уравнения Эйлера.
3. **Задача 22**

Билет 16.

1. **Интегральные принципы механики. Принцип наименьшего действия. Модифицированный принцип Гамильтона.**
2. Функция Лагранжа тяжелого симметрического волчка. Интегралы движения.
3. **Задача 17**

Билет 17

1. Формула периода колебаний одномерного движения (Период колебаний как функция энергии). Гармонический осциллятор.
2. **Метод разделения переменных переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и решения канонических уравнений.**
3. **Задача 16**

Билет 18.

1. **(точно не помню!) движение в центрально симметричном поле, решение в квадратурах, точки поворота, классификация траекторий**
2. поле скоростей. Тензоры и векторы, характеризующие поле вихря и поле скорости деформаций
3. **Задача 19**

Билет 19.

1. **Обобщенный импульс и обобщенная энергия. Интегралы движения уравнений Лагранжа.**
2. Динамически-подобные течения. Число Рейнольдса.
3. **Задача 20**

Билет 20.

1. **Задача Кеплера. Вектор-интеграл Лапласа.**
2. **Механические системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатические инварианты.**
3. **Задача 21**

Билет 21

1. **Движение частиц в центрально-симметричном поле. Формулы для периода радиального движения частицы и смещения перигея в центральном поле.**
2. Понятие об интегрируемых механических системах. Теорема Лиувилля об интегрируемости. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби как пример интегрируемой системы.
3. **Задача 1**

Билет 23 ?????

1. **Движение в ц-с полях.**
2. Ударные волны

3. Задача 23